INSA TOULOUSE
ToulouseTech
Réseau des Grandes Ecoles
Technologies & Management

Université de Toulouse

Département Génie Mécanique

Alain DAIDIE
Manuel PAREDES

MODELISATION DES SYSTEMES MECANIQUES

Semestre 8

Version : 2009/2010

Formation : 4ème Année GM
Réf. ECTS du cours : I4GMBE31

NOTION DE PRECONTRAINTE

A. PRESENTATION

1. DEFINITION

Un système mécanique est précontraint lorsqu'il existe une contrainte interne dans le système en l'absence de sollicitations extérieures.

2. INTERET DES ASSEMBLAGES PRECONTRAINTS

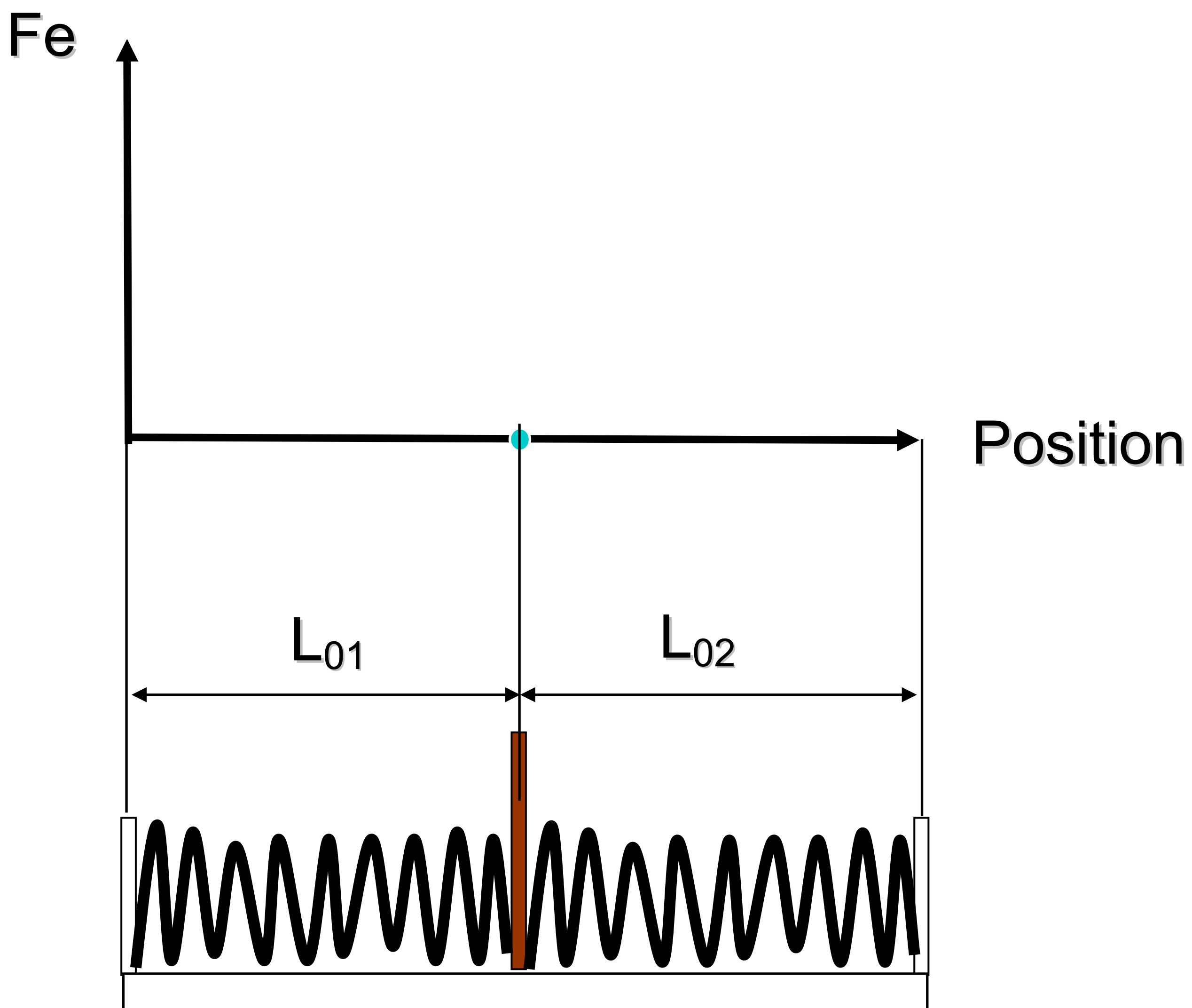
Un assemblage précontraint permet d'**éliminer les jeux et la raideur est augmentée** tant qu'il n'y a pas décollement.

3. ETUDE

Un système précontraint est un système **hyperstatique**. Son étude nécessite de faire l'équilibre des **efforts**, des **déformations**. Cela nécessite aussi de connaître les **relations efforts=f(déformations)** des éléments précontraints.

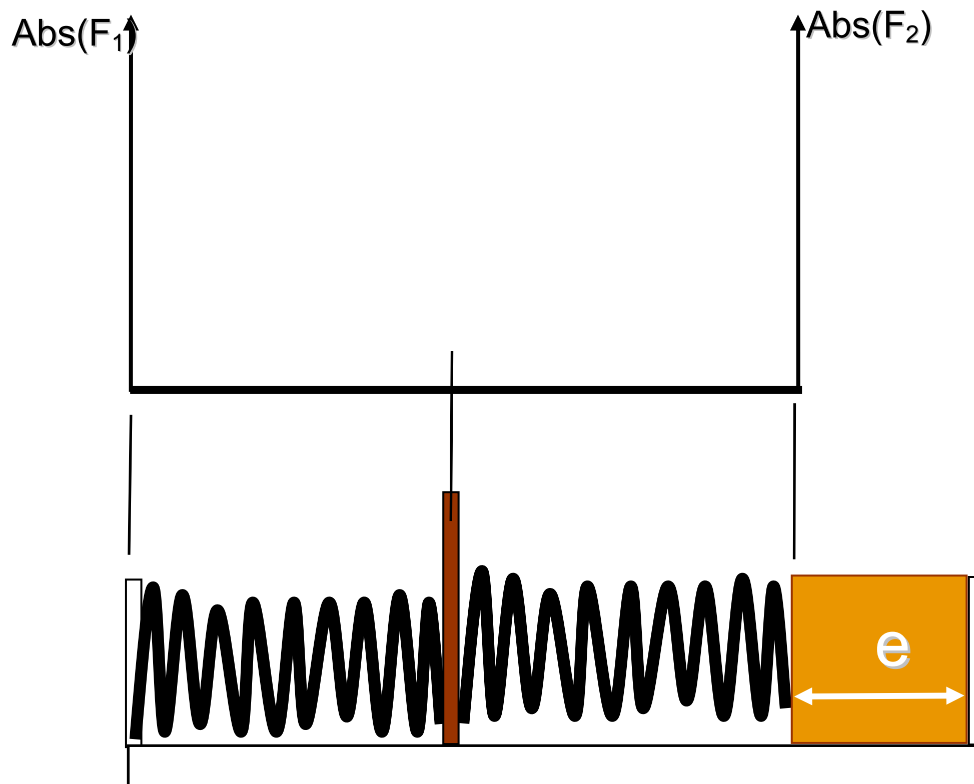
B. SCHEMATISATION

1. SANS PRECONTRAINTE : $L = L_{01} + L_{02}$



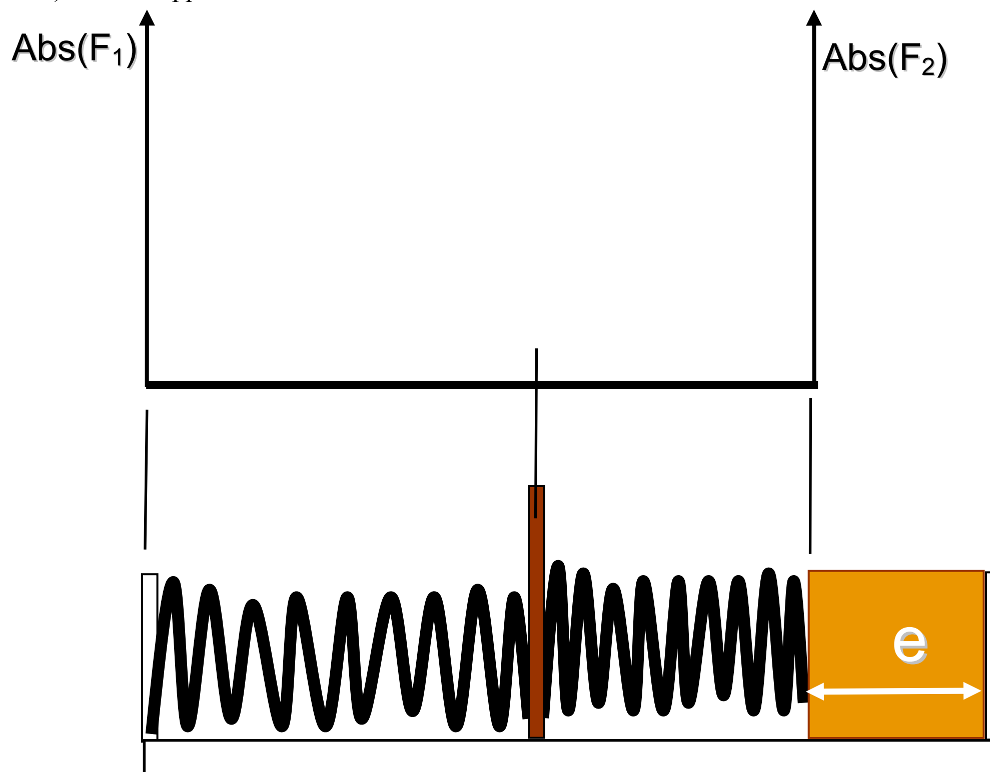
2. AVEC PRECONTRAINTE : $L = L_{01}+L_{02} - e$

2.1 Equilibre initial



2.2 Equilibre sous charge

a) erreur classique à ne pas commettre =>
b) bonne approche :



DIMENSIONNEMENT DES ARBRES

DESIGN OF SHAFTS

A. PRESENTATION

1. DEFINITION

Les arbres sont des pièces mécaniques, de section droite généralement circulaire dont la dimension suivant l'axe (de révolution) est grande par rapport aux autres dimensions.

On peut distinguer deux catégories d'arbres :

- ✓ Ceux qui transmettent un couple (*torque*) entre différents organes mécaniques : poulies (*fans*), engrenages (*gears*), cannelures (*splines*)
- ✓ Ceux qui ne transmettent pas de couple, supports d'organes mécaniques ou axes d'articulation, ils sont désignés sous le nom d'axes.

2. INTRODUCTION

Un arbre est composé des plusieurs surfaces fonctionnelles séparées le plus souvent par des épaulements (*shoulders*). On trouve généralement :

- Les zones de contact avec les éléments assurant le guidage
- La zone motrice assurant la liaison avec le moteur ou une poulie ou une roue…
- Les zone réceptrices sur lesquelles viennent se monter les éléments récepteurs (poulies, roues, pignons, cannelures…)
- Les zones intermédiaires assurant la continuité de matière entre les zone précédemment évoquées.

La **Figure 1** représente ces différentes zones pour un arbre de boîte de vitesses.

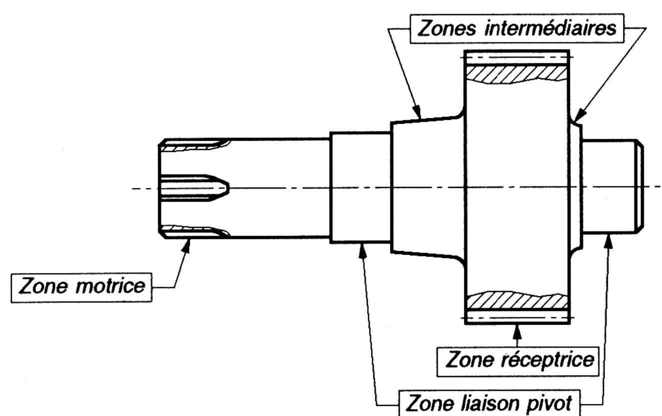


Figure 1 : Zones caractéristiques d'un arbre.

Dans la pratique, les sollicitations extérieures permettent de dimensionner les organes mécaniques liés à l'arbre (clavettes (*keys*), roulements (*bearings*), cannelures (*splines*)…). Leurs dimensions conduisent à définir les dimensions et la géométrie de l'arbre. Au moment du calcul de l'arbre, les sollicitations et la géométrie de l'arbre sont donc souvent connues.

D'une manière générale, le calcul de prédétermination d'un arbre se fait sous deux aspects :

- ✓ **Un aspect statique** : à partir du calcul de la résistance de l'arbre et de sa déformation
- ✓ **Un aspect dynamique** : à partir du calcul de la tenue en fatigue de l'arbre et des vibrations engendrées

Suivant l'utilisation de l'arbre considéré, certains types de dimensionnement seront prédominants. Par exemple, un arbre de réducteur de forte capacité sera en premier lieu calculé à la résistance tandis qu'un arbre de turbine de turbo-compresseur tournant à haute vitesse sera d'abord vérifié à partir de sa vitesse critique.

B. DIMENSIONNEMENT EN STATIQUE

1. DETERMINATION DES SOLLICITATIONS

Généralement, on connaît la disposition des éléments technologiques de liaison et les efforts appliqués aux divers organes liés avec l'arbre. Afin de déterminer les actions mécaniques exercées sur l'arbre au niveau des liaisons, on isole l'arbre et on applique le principe fondamental de la statique ou de la dynamique suivant l'importance des forces d'inertie.

L'exploitation des actions mécaniques de liaison et des efforts appliqués aux organes permet de déterminer le torseur des efforts intérieurs. L'évolution du torseur des efforts intérieurs permet d'évaluer la section de l'arbre la plus sollicitée. C'est dans cette section que sera effectué le dimensionnement en statique.

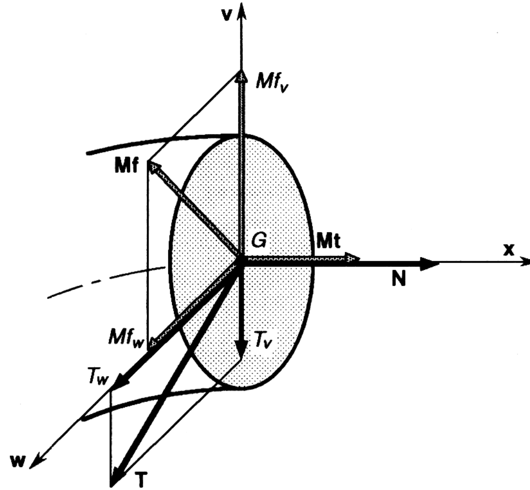


Figure 2 :Représentation du torseur des efforts intérieurs

Pour un arbre de section droite circulaire, tout axe passant par le centre de la section est un axe principal d'inertie. Dans une section donnée, on fera en sorte de choisir la base locale qui minimise le nombre de composantes du torseur des efforts intérieurs. Voici la forme générale de ce torseur en G (centre d'inertie) :

- Résultante : N x + T z
- Moments : Mt x + Mf y

Pour la suite de l'étude, on se placera toujours dans cette base. Les composantes du torseur des efforts intérieurs peuvent être représentées sous formes de diagrammes qui permettent de mettre en évidence la section à priori dangereuse.

Un critère de résistance est ensuite utilisé soit pour vérifier la tenue du point le plus sollicité de la section et donc de la section en entier (calcul du coefficient de sécurité) soit pour dimensionner la section (calcul du diamètre de l'arbre) en respectant un coefficient de sécurité fixé.

Il faut noter que la contrainte de cisaillement est maximale au centre de la section et nulle sur les bords tandis que les contraintes de flexion et de torsion sont maximales sur les bords et nulles au centre. Ainsi, d'une manière générale dans le calcul des arbres, on se place sur la périphérie de la section ce qui revient à **négliger l'effort tranchant**. On obtient donc pour un arbre de section circulaire de diamètre d :

- Contrainte normale de traction / compression : $\boldsymbol{\sigma_t = 4\ N / (\pi\ d^2)}$ (*tension stress*)
- Contrainte normale de flexion : $\boldsymbol{\sigma_f = 32\ Mf / (\pi\ d^3)}$ (*bending stress*)
- Contrainte tangentielle de torsion : $\boldsymbol{\tau = 16\ Mt / (\pi\ d^3)}$ (*shear stress*)
- Contrainte tangentielle de cisaillement : $\boldsymbol{\tau_c = 0}$ (*transverse shear stress*)

2. CRITERE DE RESISTANCE STATIQUE

En pratique, le seul essai de caractérisation des matériaux isotropes est l'essai de traction simple.

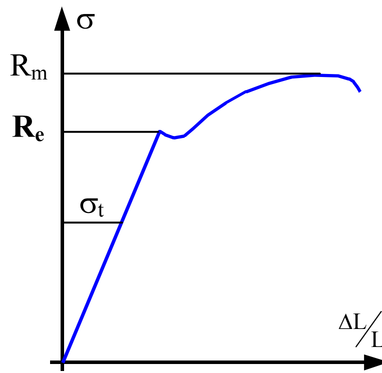


Figure 3 : Essai de traction simple

Cet essai permet principalement de déterminer la résistance à la rupture R_m (*ultimate tensile strength*) et la résistance élastique R_e (*yeld strength*). Ce sont ces informations qui sont exploitées pour le dimensionnement des arbres. Les tableaux suivants fournissent les valeurs de R_m et R_e pour des matériaux de construction usuels.

ACIERS (*steel*)

Nom + TTh	Rm (MPa)	Re (MPa)	E (GPa)	Prix
S 235 (E24)	340	185	205	100
E 335 (A60)	570	335	205	104
C35 (XC38) recuit	585	340	205	108
34 CrMo4 (35 CD4) trempé revenu	920	550	205	263
36 NiCrMo16 (35 NCD16) trempé revenu	1200	900	205	418

ACIERS INOX (*stainless steel*)

Nom	Rm (MPa)	Re (MPa)	E (GPa)	Prix
X6 Cr17 (Z8C17)	400-640	240-280	190	
X6CrNiTi18 10 (Z6CNT18-10)	500-730	200-270	190	
X30Cr13 (Z33C13)	800-1000	600-650	190	

AUTRES

Nom	Rm (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)	Prix
Fonte : EN-GJL 300 (Ft30)	300	200	120000	80
Fonte : EN-GJL 600 (FGS 500)	600	370	168000	
Aluminium : EN AW-2017 (AU4G)	220-390	140-250	74000	450
Bronze : CuSn12	240	130	110000	
Titane allié : T-A6V	900	830	108000	
Plastique : PVC	35-60		2600	368
Plastique : POM (DELRIN)	70		2850-3100	947
Composite carbone-époxy (homogénéisé)	1000		100000	
Résine époxy seule (ν = 0,38)		82	3500	

Lorsqu'une pièce est soumise à de la traction simple, il est facile de comparer la contrainte à la limite élastique R_e pour avoir une idée de la sécurité donnée par le calcul.

En pratique, en un point donné d'une section, on a souvent un état complexe de contrainte. La méthode de calcul consiste alors à déterminer une contrainte normale équivalente $σ_e$. Cette contrainte est alors la contrainte qu'il faut créer dans une éprouvette de traction pour que son état de contrainte comporte le même degré de danger que l'état complexe caractérisé par les trois contraintes principales.

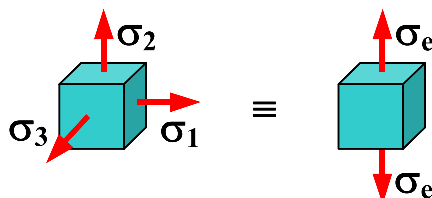


Figure 4 : Représentation d'un torseur équivalent

Cette contrainte équivalente peut alors être utilisée pour déterminer le coefficient de sécurité $\alpha_S = R_e / \sigma_e$.

Le coefficient de sécurité est toujours supérieur à 1. Il traduit l'incertitude sur le calcul. Un 'bon' calcul a donc un coefficient de sécurité proche de 1. Dans certains cas, le coefficient de sécurité intègre d'autre notions comme l'importance de la dégradation partielle ou totale du mécanisme ou le danger pour la vie humaine. Sa valeur est alors bien plus importante.

Lors d'un calcul de dimensionnement, la connaissance du coefficient de sécurité souhaité permet de déterminer la dimension minimale requise de la section étudiée. Pour un calcul de vérification, on détermine la valeur réelle du coefficient de sécurité et on la compare au coefficient de sécurité souhaité.

Il existe un grand nombre de critère pour calculer la contrainte équivalente, aucun ne convient à tous le matériaux et à tous les états de contraintes. On en retient généralement deux qui donnent des résultats convenable pour les matériaux usuels de construction mécanique. Pour ces deux critères, on suppose que les matériaux ont la même résistance élastique en traction et en compression.

2.1. Le critère de Tresca ou du cisaillement maximum

Ce critère convient pour les aciers doux et les alliages légers. Il peut s'énoncer ainsi : deux états de contrainte sont également dangereux s'il y a égalité des contraintes tangentielles maximales.

On obtient la formulation suivante :

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_t + \sigma_f)^2 + 4\left(\tau^2 + \tau_c^2\right)}$$

2.2. Le critère de Von Mises

Ce critère est très utilisé pour l'ensemble des matériaux métalliques. Il est basé sur l'hypothèse que la défaillance du matériau se produit lorsque l'énergie de variation de forme atteint une valeur limite fixée.

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_t + \sigma_f)^2 + 3\left(\tau^2 + \tau_c^2\right)}$$

3. EFFET DES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES (*STRESS CONCENTRATION*)

Si la pièce présente des discontinuités de forme (entailles, épaulements, rainures, trous…), autour des ces zones les contraintes réelles sont beaucoup plus importantes que les contraintes nominales obtenue à partir des calculs classiques de RDM. Ce phénomène local est appelé phénomène de concentration de contraintes.

Dans la section considérée, le coefficient de concentration de contrainte K_t (*stress concentration factor*) est défini comme le rapport entre la contrainte maximale réelle et la contrainte maximale nominale.

K_t est toujours supérieur à 1. Il est déterminé par la théorie de l'élasticité. Lorsque la géométrie des discontinuités est complexe, on utilise la photoélasticimétrie ou les logiciels exploitant les éléments finis.

La section considérée est la section nette qui tient compte de la section de matière enlevée par la discontinuité si celle-ci est importante.

La Figure 5 illustre ce problème pour une arbre entaillé par une gorge.

- σ représente les contraintes nominales, dues à différentes sollicitations dans une section sans discontinuités.
- σ_r, représente les contraintes réelles dues à l'effet d'entaille.

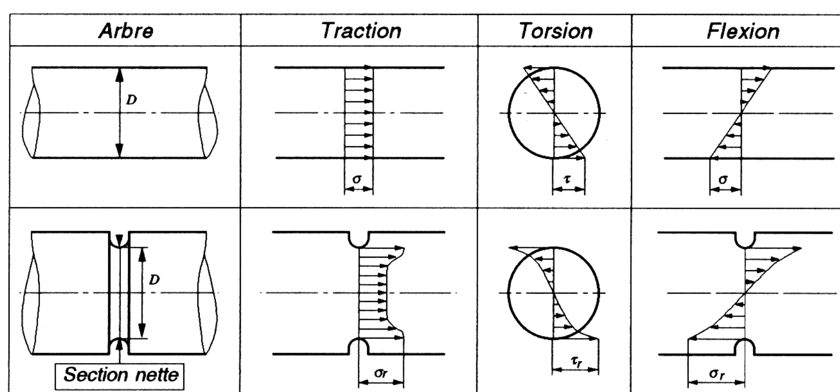


Figure 5 : Représentation des contraintes réelles

Le coefficient K_t ne dépend que du mode de sollicitation et de la géométrie de la discontinuité. On note K_{tt}, K_{tf}, K_{to} les coefficients d'entailles relatifs aux sollicitations de traction, flexion et torsion.

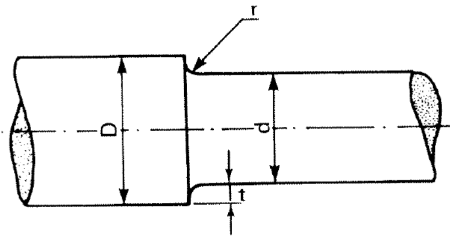
Pour le calcul de la contrainte équivalente, les contraintes nominales sont affectées individuellement du K_t qui leur correspond.

- Tresca :

$$\sigma_e = \sqrt{(K_{tt}\ \sigma_t + K_{tf}\ \sigma_f)^2 + 4\ K_{to}^2\ \tau^2}$$

- Von Mises :

$$\sigma_e = \sqrt{(K_{tt}\ \sigma_t + K_{tf}\ \sigma_f)^2 + 3\ K_{to}^2\ \tau^2}$$



$$K_p = \sqrt{\frac{t}{r} \times \frac{\frac{d}{D}}{1 - \frac{d}{D}} + 1} - 1$$

$$K_q = \sqrt{\frac{t}{r}}$$

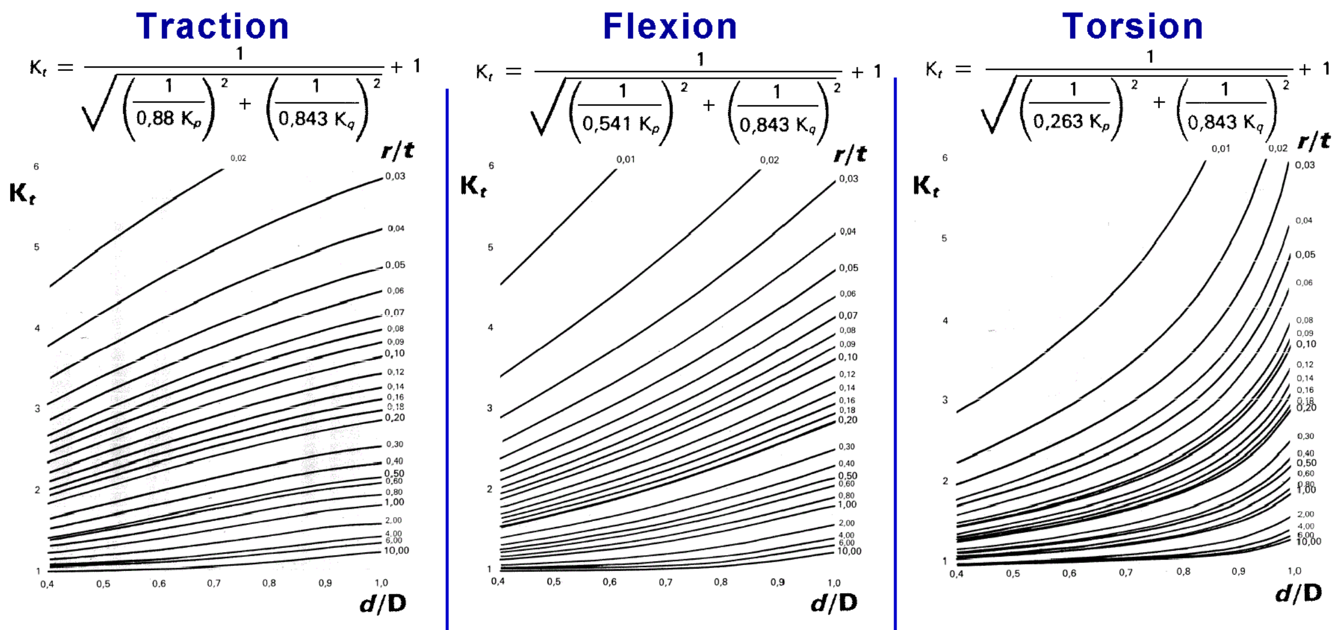


Figure 6 : Détermination de K_t pour un arbre avec épaulement

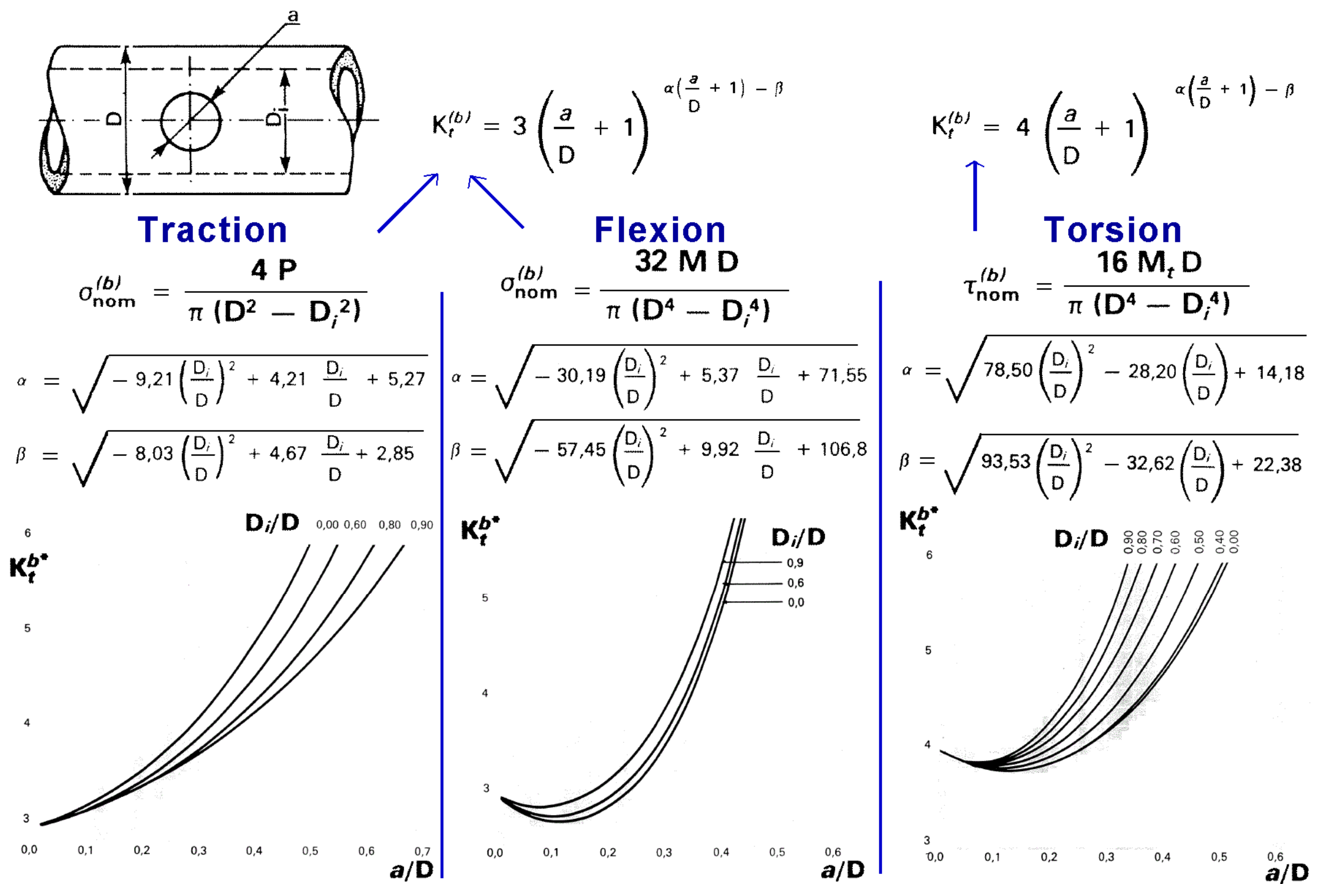


Figure 7 : Détermination de K_t pour un arbre creux avec trou transversal

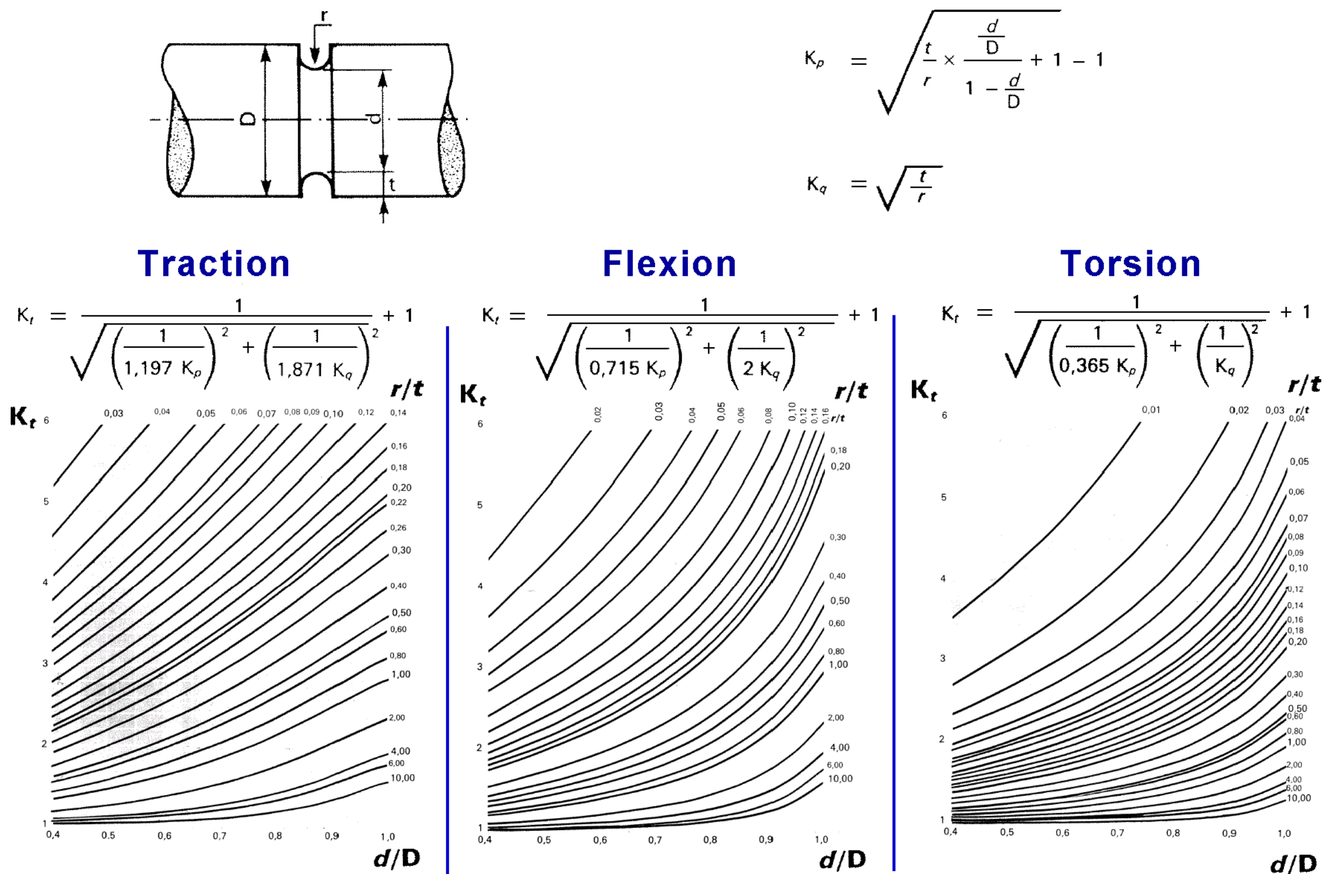


Figure 8 : Détermination de K_t pour arbre avec une gorge

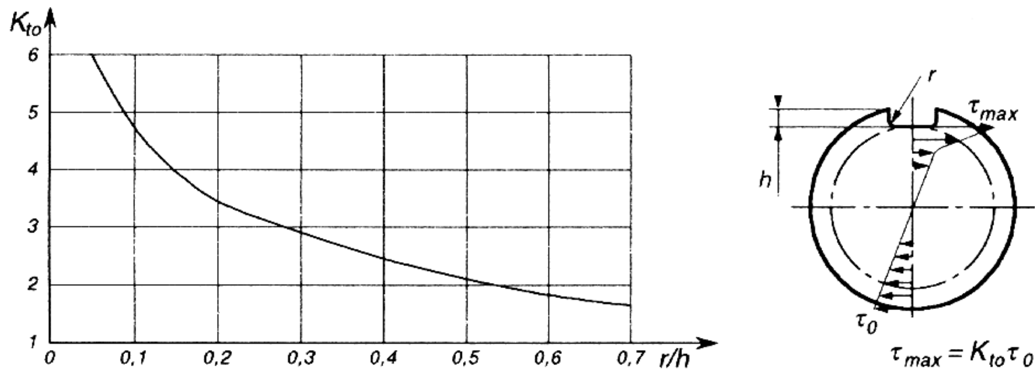
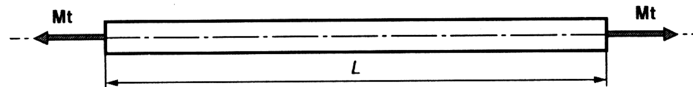


Figure 9 : Détermination de K_{to} pour un arbre avec une rainure de clavette

4. VERIFICATION A LA DEFORMATION

Un arbre subit, sous les charges appliquées, des déformations principalement en torsion et en flexion. La déformation en torsion peut nuire à la précision de la transmission. La déformation en flexion peut conduire à une détérioration rapide des éléments de liaison et des éléments de transmission.

Voici la formule de déterminant la déformation d'un arbre de diamètre d, de longueur L et de module de cisaillement G soumis à un moment de torsion Mt : θ (radians) = $32 \, Mt \, L / (\pi \, G \, d^4)$



Le calcul en flexion permet d'évaluer les flèches et les rotations aux droit des éléments de guidage ou des organes de transmission. Les valeurs peuvent être obtenues pour des sections et des sollicitations simples par les formules de RDM ou bien par utilisation de logiciels éléments-finis type RDM LE MANS pour les cas plus complexes.

C. NOTIONS SUR LA FATIGUE DES PIECES MECANIQUES

1. DEFINITION DU PHENOMENE DE FATIGUE

La plupart des pièces mécaniques, au cours de leur fonctionnement, sont soumises à des sollicitations variables dans le temps. Ce type de sollicitations entraîne des variations cycliques des contraintes.

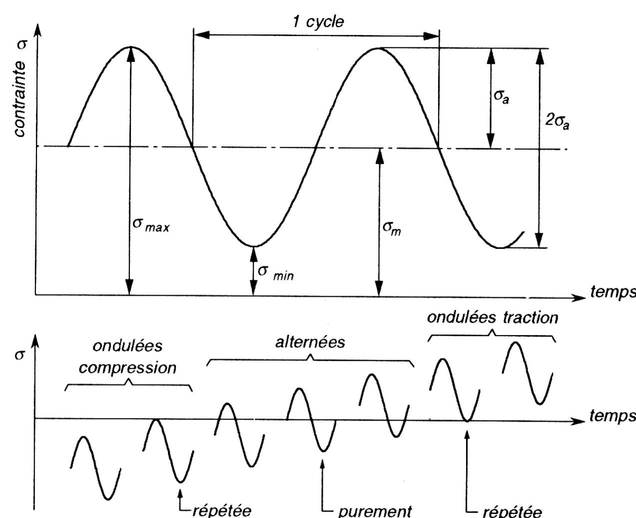


Figure 10 : Sollicitations cycliques

Pour ces pièces, on constate que la rupture se produit au bout d'un nombre de cycles N, pour une amplitude de contrainte inférieure à la contrainte de rupture statique Rm du matériau utilisé, c'est le phénomène de fatigue. L'image suivante montre l'analyse de la rupture d'un arbre soumis à de la flexion rotative.

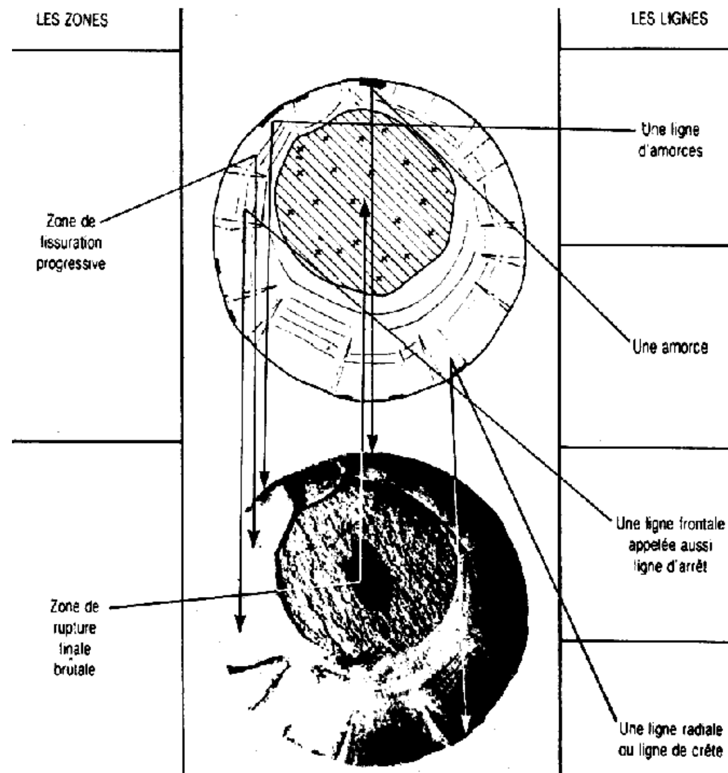


Figure 11 : Rupture d'un arbre en flexion rotative

2. CONSIDERATIONS DE BASE, ESSAI DE FATIGUE UNIDIRECTIONNEL

L'essai de fatigue est un essai normalisé qui consiste à appliquer à une éprouvette lisse ou entaillée de forme cylindrique ou prismatique un nombre très élevé de cycles identiques de contraintes. Le but est de déterminer pour un cycle de contrainte donné, le nombre de cycles à rupture de l'éprouvette testée. Compte tenu de la dispersion obtenue dans les résultats, dans la pratique, on ne réalise par un seul essai mais des campagnes d'essais et les valeurs exploitées dans les calculs sont indiquées pour une probabilité de survie donnée.

La figure suivante montre les résultats obtenus pour une éprouvette en XC 38 soumise à de la traction purement alternée.

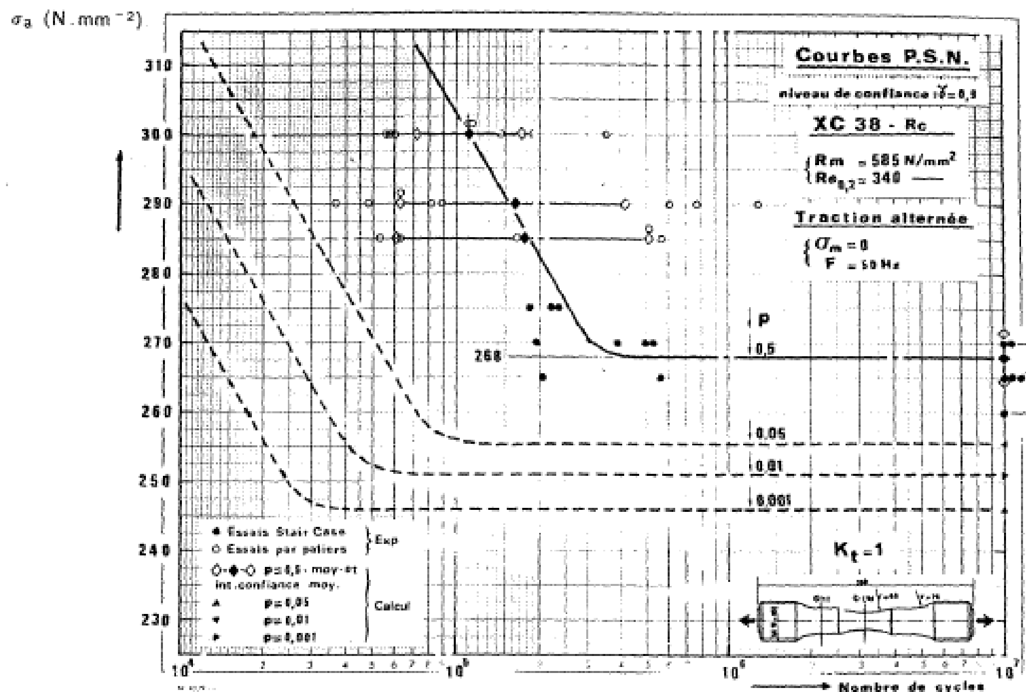


Figure 12 : Essai de fatigue sur un éprouvette en XC38 (CETIM)

3. LA COURBE DE WOHLER

La figure suivante représente pour une contrainte moyenne nulle, l'évolution de la contrainte alternée en fonction du nombre de cycles pour un pourcentage de survie p. Ce type de courbe issu des très nombreux résultats expérimentaux obtenus en flexion rotative ou traction alternée est appelé **courbe de Wohler**.

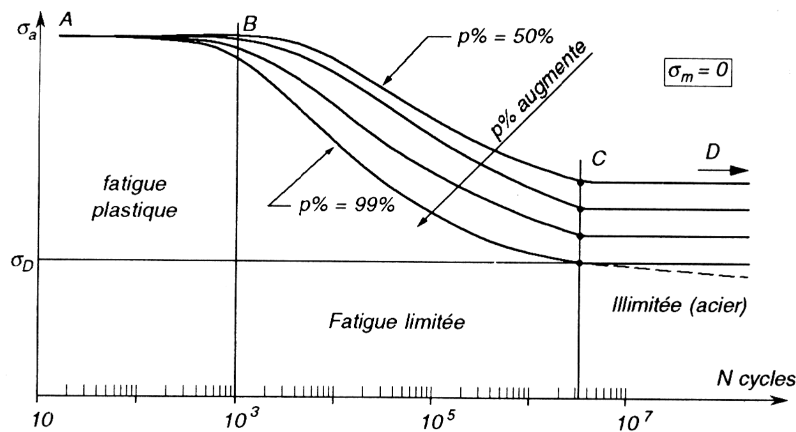


Figure 13 : Courbe de Wohler (Aublin)

Cette courbe montre le comportement caractéristique des aciers.
On observe 3 zones :

1. La **zone plastique** : nombre de cycles inférieur à 10^3. La rupture intervient après un tout petit nombre de cycles, on est proche du comportement statique du matériau.
2. La **zone de fatigue limitée** : la rupture intervient après une nombre de cycles d'autant plus important que la contrainte est faible
3. La **zone de fatigue illimitée** : nombre de cycles supérieur à 10^7. Lorsque la contrainte est en dessous d'un certain seuil, le rupture ne se produit plus quel que soit le nombre de cycles.

σ_D est appelé **limite de fatigue**. C'est la contrainte alternée la plus grande possible pour laquelle la rupture ne se produit pas pour un nombre illimité de cycles.
Dans la majorité des cas, les arbres sont calculés pour un nombre de cycles supérieur à 10^7 et σ_D est utilisé dans le calcul de fatigue. Lorsque le nombre de cycles requis est inférieur, on utilise $\sigma_{D(N)}$ qui représente la contrainte alternée maximale admissible pour un nombre de cycles N.

4. DIAGRAMME DE HAIGH ET COEFFICIENT DE SECURITE EN FATIGUE

Dans le cas général de la fatigue, les contraintes se décomposent en contraintes moyennes (indice : m) et en contraintes alternées (indice : a).
Nous avons vu jusqu'ici le comportement d'un matériau en statique ($\sigma_a = 0$) et en dynamique pure ($\sigma_m = 0$). Pour étudier le comportement d'un matériau soumis à une sollicitation mixte (σ_a et σ_m), on utilise un diagramme d'endurance construit à partir des valeurs caractéristiques de statique (R_m) et de dynamique pure (σ_D)

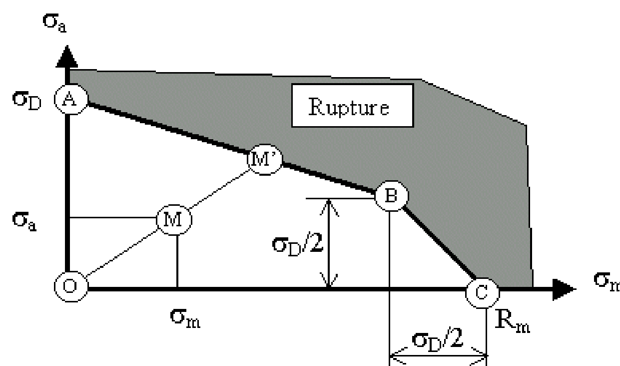


Figure 14 : Représentation pratique du diagramme de Haigh

Tout point situé à l'intérieur du domaine correspond à un état de contrainte qui convient. Pour un état de contrainte donné (σ_a et σ_m), il est possible de calculer un coefficient de sécurité en fatigue α_F qui correspond au rapport des distances OM'/OM.
Sur le diagramme, on distingue deux lieux possibles pour M', le segment AB et le segment BC, on obtient donc deux formulation possibles pour α_F.

Sur le segment AB :

$$\alpha_{FAB} = \frac{1}{\dfrac{\sigma_a}{\sigma_D} + \dfrac{\sigma_m}{2R_m - \sigma_D}}$$

Sur le segment BC :

$$\alpha_{FBC} = \frac{R_m}{\sigma_a + \sigma_m}$$

La valeur finale retenue est la valeur la plus petite : $\alpha_F = \mathrm{Min}(\alpha_{FAB} ; \alpha_{FBC})$

5. LES FACTEURS D'INFLUENCES

5.1. Influence de R_m

Pour les aciers, le CETIM a montré que l'on peut lier la valeur de σ_D en flexion rotative avec la limite statique de rupture R_m.

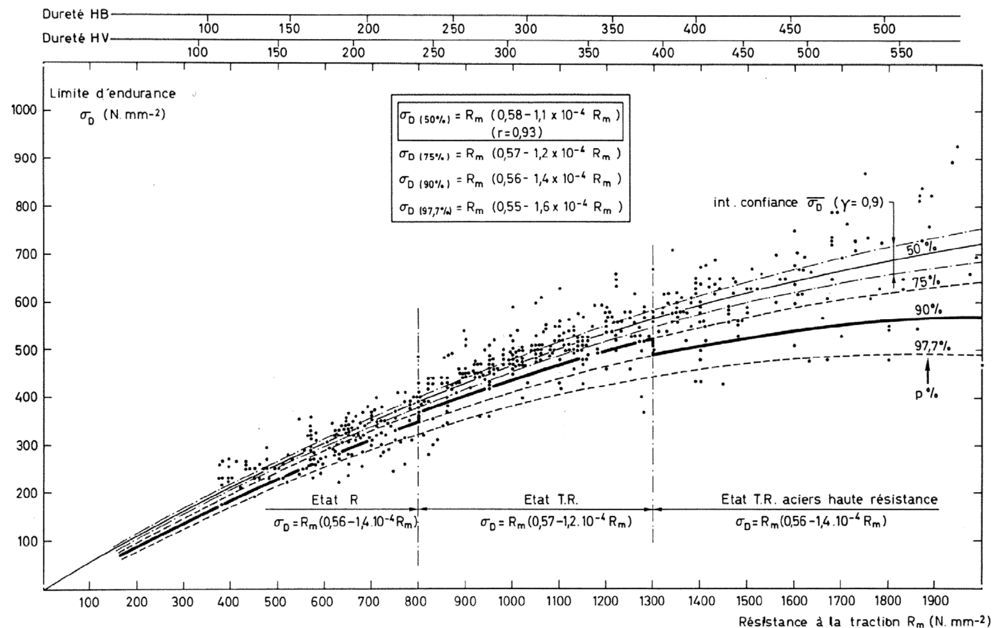


Figure 15 : Abaque liant σ_D en flexion rotative avec R_m (CETIM), pour $N \geq 10^7$ cycles (Acier)

5.2. Influence de l'état de surface

L'état de surface a une influence importante sur la tenue en fatigue. Plus la rugosité est faible plus la limite de fatigue est grande. De même, la perte d'endurance due à un mauvais état de surface est d'autant plus importante que la résistance mécanique du matériau est grande.

La figure suivante montre l'abaque permettant de définir le facteur correctif K_S en fonction de R_m et de la rugosité totale R_t.

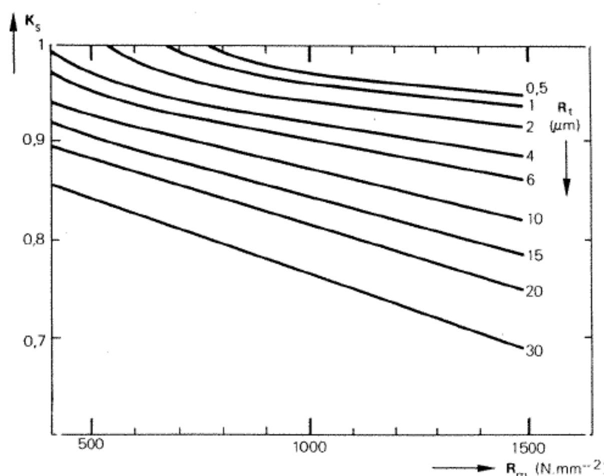


Figure 16 : Détermination de K_S (CETIM)

5.3. Influence du type de sollicitation et des dimensions

Lorsqu'on mesure la limite de fatigue, on n'obtient pas la même valeur suivant que l'on se place en flexion, en traction/compression ou en torsion. De la même manière, on constate expérimentalement que la limite de fatigue est d'autant plus basse que l'éprouvette utilisée est de grande dimensions. Nous verrons par la suite comment tenir compte de ces phénomènes dans les calculs.

5.4. Influence d'un défaut de forme

Nous avons vu pour le calcul en statique qu'un défaut de forme engendre une augmentation de contrainte dans la section déterminée à partir de K_t. Lorsqu'on examine la rupture d'un matériau (donc avec dépassement de la limite élastique), on s'aperçoit que la limite de rupture augmente avec K_t, c'est le phénomène d'adaptation. La limite de fatigue évolue aussi en fonction des défauts de forme.

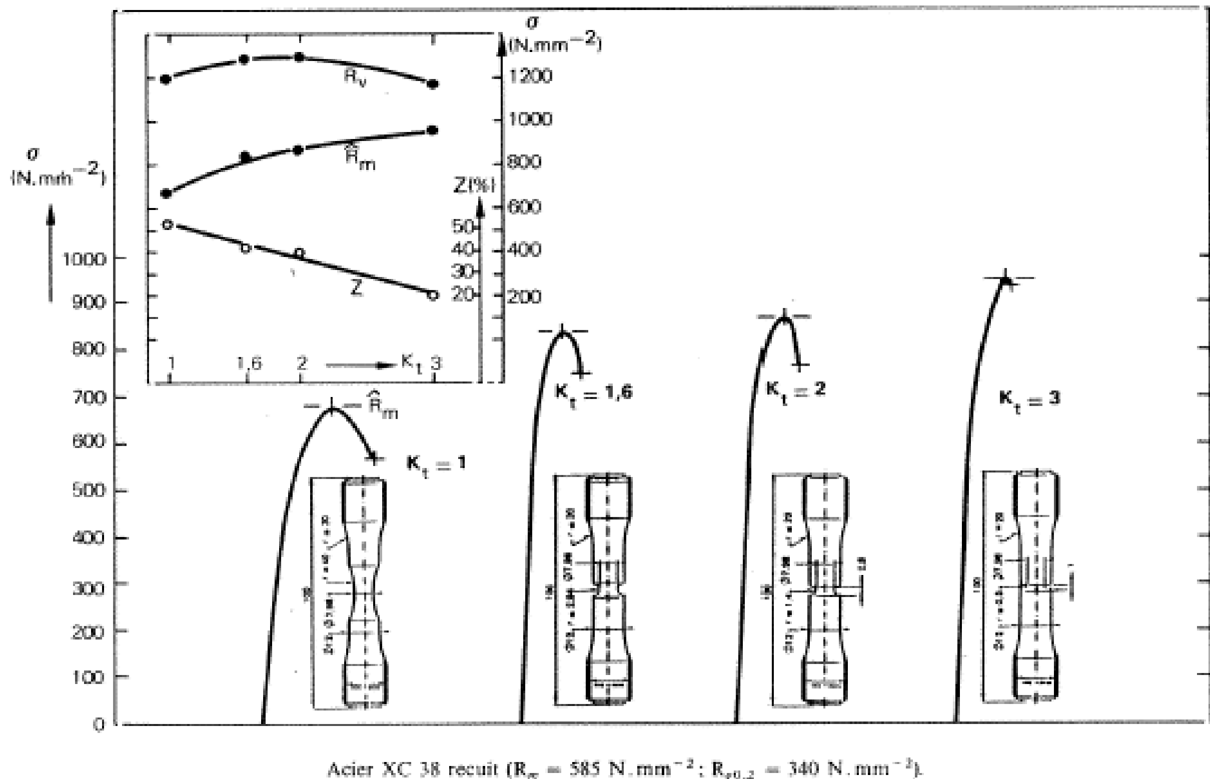


Figure 17 : Mise en évidence du phénomène d'adaptation (CETIM)

5.5. Le gradient de contrainte χ

Le gradient de contrainte est le facteur que le CETIM préconise d'utiliser pour caractériser l'influence du type de sollicitation, des dimensions et du défaut de forme.

Le gradient de contrainte χ (Figure 18) exprimé en mm^{-1} est la valeur de la pente de la tangente à fond d'entaille du champ de contrainte rapportée à la valeur maximale de la contrainte au même point.

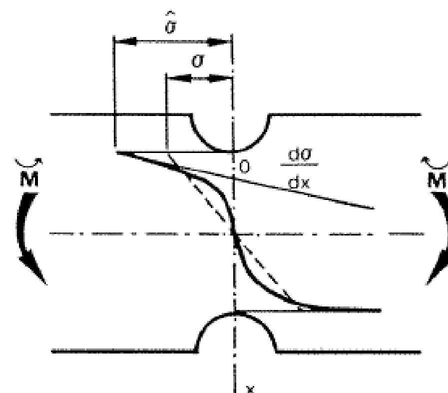


Figure 18 : Gradient de contrainte (CETIM)

La table suivante donne des formules simples permettant de calculer χ.

Sollicitations	Types de pièces	X (mm^{-1})
TRACTION	Plaque, Arbre	$\frac{2}{r}$
FLEXION	Plaque, Arbre	$\frac{2}{r} + \frac{2}{d}$
FLEXION	Plaque, Arbre	$\frac{2}{r} + \frac{4}{d+D}$
TORSION	Arbre	$\frac{1}{r} + \frac{2}{d}$
TORSION	Arbre	$\frac{1}{r} + \frac{4}{d+D}$
FLEXION	Arbre percé	$\frac{4}{r}$
TORSION		$\frac{3}{r}$

Figure 19 : Table de détermination du gradient de contrainte (CETIM)

5.6. Influence de la température

Les caractéristiques des aciers évoluent de manière importante avec la température. Malheureusement, il est très difficile de trouver des documentations permettant de quantifier précisément l'impact de la température sur la tenue en fatigue des aciers. Toutes les informations fournies dans ce document sont indiquées à **température ambiante**, c'est une limitation importante pour l'exploitation pratique de l'approche proposée.

D. DIMENSIONNEMENT EN DYNAMIQUE

Au moment du calcul en fatigue, les facteurs influents sur les caractéristiques de fatigue du matériau sont généralement connus. Ainsi, **le calcul d'un arbre en fatigue est majoritairement un calcul de vérification**. Le coefficient de sécurité en fatigue sera comparé au coefficient de sécurité requis pour le mécanisme. Pour réaliser ce calcul, nous allons exploiter la **méthode du gradient** préconisée par le CETIM. Remarquons que pour le concepteur, l'étude en fatigue est une étude à la rupture alors que l'étude en statique vue précédemment est une étude à la limite élastique.

1. DETERMINATION DES SOLLICITATIONS

Comme en statique, la première étape consiste à déterminer les sollicitations dans la section réputée la plus dangereuse. Dans le cas de la fatigue, les sollicitations se décomposent en sollicitations moyennes (indice m) et en sollicitations alternées (indice a). Voici la forme générale du torseur en G (centre d'inertie) :

Résultantes : $(N_m + N_a)\, x + (T_m + T_a)\, z$

Moments : $(Mt_m + Mt_a)\, x + (Mf_m + Mf_a)\, y$

2. DETERMINATION DES CONTRAINTES EQUIVALENTES

On calcule tout d'abord les contraintes nominales (sans tenir compte des défauts de forme) au point de la section le plus sollicité. Rappelons ici que pour les arbres, **dans la plupart des cas**, le calcul est effectué sur la périphérie de la section et par conséquent **l'influence de l'effort tranchant est négligée**. On obtient ainsi :

$$\sigma_{tm} = 4\, N_m / (\pi\, d^2) \qquad \sigma_{ta} = 4\, N_a / (\pi\, d^2)$$

$$\sigma_{fm} = 32\, Mf_m / (\pi\, d^3) \qquad \sigma_{fa} = 32\, Mf_a / (\pi\, d^3)$$

$$\tau_m = 16\, Mt_m / (\pi\, d^3) \qquad \tau_a = 16\, Mt_a / (\pi\, d^3)$$

La contrainte moyenne équivalente σ_{me} est calculée à partir des contraintes moyennes nominales et ne prend pas en compte les défauts de forme. On obtient à partir du critère de Von Mises :

$$\sigma_{me} = \sqrt{(\sigma_{tm} + \sigma_{fm})^2 + 3\tau_m^2}$$

La contrainte alternée équivalente σ_{me} est calculée à partir des contraintes alternées nominales et prend en compte les défauts de forme en intégrant les Kt correspondant : K_{tt} (traction), K_{tf} (flexion) et K_{to} (torsion).

On obtient à partir du critère de Von Mises :

$$\sigma_{ae} = \sqrt{(K_{tt}\ \sigma_{ta} + K_{tf}\ \sigma_{fa})^2 + 3\ K_{to}^2\ \tau_a^2}$$

3. DETERMINATION DES χ

Pour prendre en compte les défauts de forme, l'influence des dimensions et des sollicitations, on détermine tout d'abord les gradients de contrainte pour les sollicitations considérées (voir Figure 19). On obtient ainsi les valeurs de χ_t (traction), χ_f (flexion) et χ_o (torsion),

4. DETERMINATION DE LA RESISTANCE PRATIQUE A LA RUPTURE R_{MP}

La résistance pratique à la rupture dépend de la valeur de R_m et de χ.
Pour une sollicitation simple pure, on obtient avec une probabilité à 90% :

$$R_{mp} = R_m\,(0.25 \operatorname{Log} \chi + 1.4)$$

Pour une sollicitation combinée on remplace le gradient de contrainte χ par une valeur équivalente χ_{me} :

$$\chi_{me} = \sqrt{\frac{(\sigma_{tm}\,\chi_t + \sigma_{fm}\,\chi_f)^2 + 3\,\tau_m^2\chi_o^2}{(\sigma_{tm} + \sigma_{fm})^2 + 3\,\tau_m^2}}$$

5. DETERMINATION DE LA LIMITE PRATIQUE DE FATIGUE σ_{DP}

La limite pratique de fatigue dépend aussi de R_m et de χ. Elle dépend aussi du défaut de surface K_S.
Pour une sollicitation simple, un calcul à 10^7 cycles et une probabilité à 90%, σ_{Dp} est de la forme :

$$\sigma_{Dp} = K_S\,(a \operatorname{Log} \chi + b)$$

Les valeurs de a et b en fonction de R_m peuvent être prises dans la table suivante :

Classe acier (R_m en $N.mm^{-2}$)	*a*	*b*
$R_m \geq 1\,400$	100/3	655
$1\,200 \leq R_m < 1\,400$	110/3	585
$1\,000 \leq R_m < 1\,200$	120/3	520
$900 \leq R_m < 1\,000$	130/3	465
$800 \leq R_m < 900$	130/3	430
$700 \leq R_m < 800$	135/3	390
$600 \leq R_m < 700$	135/3	335
$500 \leq R_m < 600$	140/3	295
$400 \leq R_m < 500$	140/3	245
$R_m < 400$	140/3	195
Classe acier moulé (R_m en $N.mm^{-2}$)	***a***	***b***
$350 \leq R_m < 500$	140/3	180
$R_m < 350$	140/3	135

Figure 20 : Table de détermination des paramètres pour le calcul de σ_{Dp} (CETIM)

Pour une sollicitation simple, un nombre de cycle N inférieur à 10^7 et une probabilité à 90%, σ_{Dp} est de la forme :

$$\sigma_{Dp} = K_S\,(a_2 \operatorname{Log} \chi + b_2 \operatorname{Log} N + c_2)$$

Les valeurs de a_2, b_2, et c_2 en fonction de R_m peuvent être lues sur le graphique suivant :

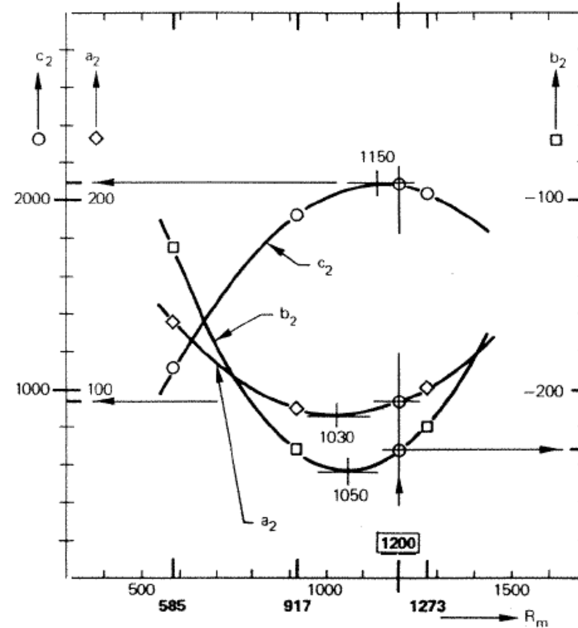


Figure 21 : Table de détermination des paramètres pour le calcul de σ_{Dp} (CETIM)

Pour une sollicitation combinée, on remplace le gradient de contrainte χ par une valeur équivalente χ_{ae} :

$$\chi_{ae} = \sqrt{\frac{(\sigma_{ta}\ \chi_t + \sigma_{fa}\ \chi_f)^2 + 3\ \tau_a{}^2 \chi_o{}^2}{(\sigma_{ta} + \sigma_{fa})^2 + 3\ \tau_a{}^2}}$$

6. DETERMINATION DU COEFFICIENT DE SECURITE EN FATIGUE α_F

Une fois les contraintes équivalentes (σ_{me} et σ_{ae}) et les résistances pratiques (R_{mp} et σ_{Dp}) calculées, il est facile de tracer le diagramme de Haigh correspondant au cas étudié.

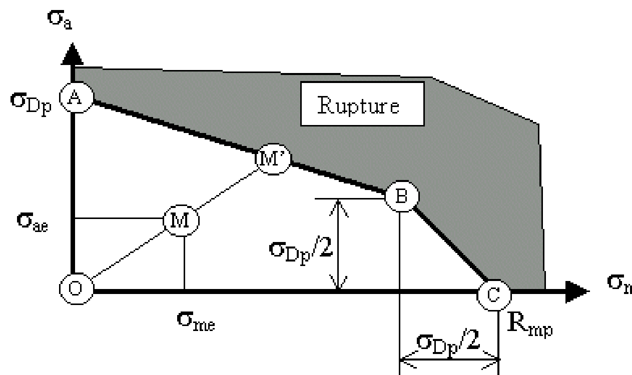


Figure 22 : Diagramme pratique de Haigh

On obtient sur le segment AB :

$$\alpha_{FAB} = \frac{1}{\frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{Dp}} + \frac{\sigma_{me}}{2R_{mp} - \sigma_{Dp}}}$$

Sur le segment BC :

$$\alpha_{FBC} = \frac{R_{mp}}{\sigma_{ae} + \sigma_{me}}$$

La valeur finale retenue est la valeur la plus petite obtenue : $\alpha_F = \text{Min}(\alpha_{FAB}\ ;\ \alpha_{FBC})$

7. VIBRATIONS D'UN ARBRE

Un arbre possède des fréquences critiques de rotations (*critical speeds*) N_c dues notamment aux fréquences de résonance en flexion et en torsion. Lorsqu'un arbre tourne à une vitesse proche d'une vitesse critique, il peut subir des détériorations

importantes. En règle générale, on fait en sorte que la vitesse de rotation soit en dehors de la zone comprise entre 0.7 N_c et 1.3 N_c.

Une étude approfondie du comportement en flexion permet de mettre en évidence un **phénomène d'autostabilisation à haute vitesse**. Pour le concepteur, cela veut dire qu'un arbre sera stable à haute vitesse si l'on prend la précaution, lors de la mise en route, de franchir rapidement les zones de vitesse critique.

E. EXEMPLE DE CALCUL D'ARBRE

1. POSITION DU PROBLEME ET MODELISATION

Nous allons traiter le cas de la conception d'un arbre d'entrée d'un réducteur. Cet arbre en 35CD4 doit transmettre une puissance de 50 kW à une vitesse de 1500 tr/min ce qui donne un couple Ce = 318 Nm. En fonction de ces données, le pignon (arbré) est dimensionné et a les caractéristiques suivantes :
$Z = 20$, $m = 3$ mm , $\alpha = 20°$, $\beta = 9°$, $B = 70$ mm, $x_1 = 0.2$ d'où $R = 30.37$ mm

Compte tenu du pignon et du reste du mécanisme, on choisit la modélisation suivante pour l'arbre :

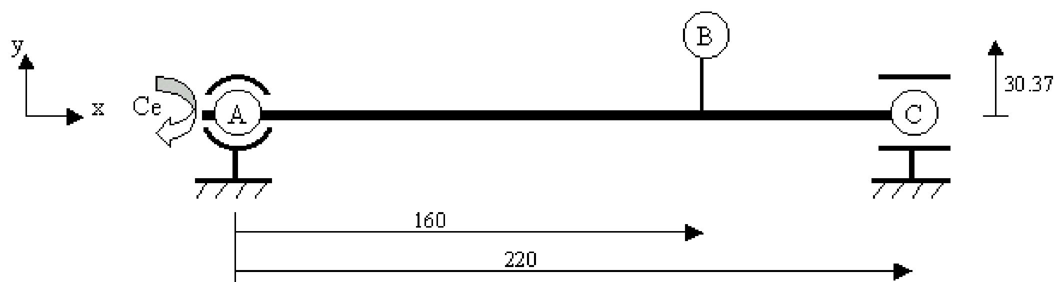


Figure 23 : Modélisation de l'arbre

2. DETERMINATION DES TORSEURS DE LIAISONS

La transmission de la puissance d'entrée par l'engrenage à **denture hélicoïdale (*helical gear*) en B** donne :

$X_B = F_A = F_T \tan(\beta) = 1660$ N
$Y_B = - F_R = - F_T \tan(\alpha) / \cos(\beta) = -3862$ N
$Z_B = F_T = - Ce / R = 10480$ N (le couple d'entrée est choisit négatif)

En prenant l'origine du repère en A, on peut déterminer les inconnues de la **liaison linéaire annulaire en C** (Y_C et Z_C) en effectuant l'équilibre des moments en A :

$X_C = 0$ N (nature de la liaison)
$Y_C = (X_B\, y_B - Y_B\, x_B) / x_C = (1660 * 30,37 + 3862 * 160) / 220 = 3038$ N
$Z_C = - Z_B\, x_B / x_C = -10480 * 160 / 220 = -7622$ N

L'équilibre des efforts permet de déterminer les inconnues de la **liaison rotule en A** :

$X_A = - X_B - X_C = - 1660$ N
$Y_A = - Y_B - Y_C = 824$ N
$Z_A = - Z_B - Z_C = -2858$ N

3. CHOIX DES ROULEMENTS

Nous souhaitons une durée de vie de 50 000 h soit 4500 Mtours.

Avec un roulement à rouleaux cylindriques en C, on obtient :

$F_R = (7622^2 + 3038^2)^{0.5} = 8205$ N
$Ceq = 8201 * 4500^{0.3} = 102339$ N

On sélectionne le roulement : d = 35 mm, D = 80 mm, B = 31 mm, C = 108000 N

Avec un roulement à rotule sur rouleaux en A, on obtient :

$F_A = 1660$ N
$F_R = (824^2 + 2858^2)^{0.5} = 2975$ N
$F_A / F_R = 0.55$ (supérieur à e) d'où $Ceq = (0.67 * 2975 + 4 * 1660) * 4500^{0.3} = 107681$ N

On sélectionne le roulement : d = 40 mm, D = 90 mm, B = 33 mm, C = 115000 N

4. CONCEPTION DE L'ARBRE ET DETERMINATION DE LA SECTION DE CALCUL

Avec ces informations, l'arbre est dessiné comme présenté sur la figure suivante :

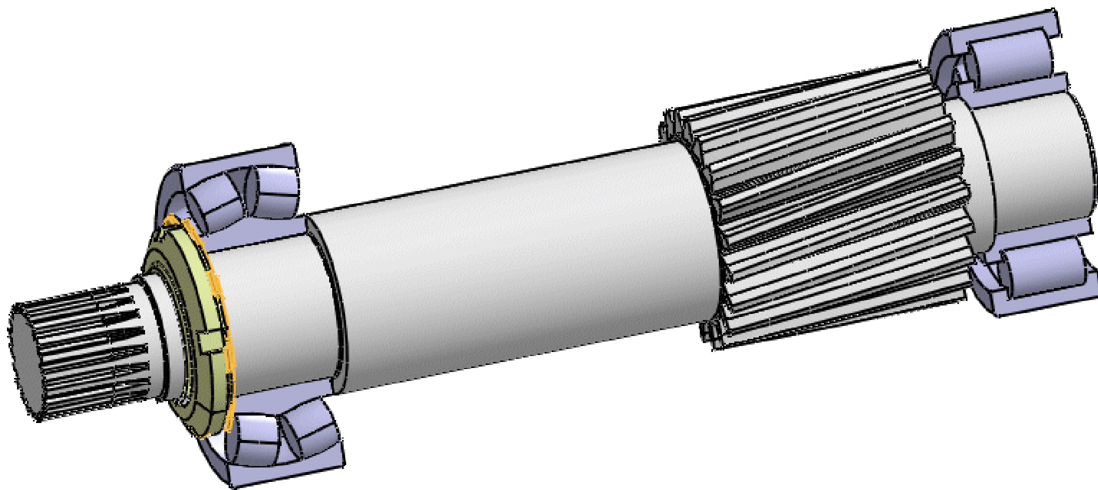


Figure 24 : Conception retenue pour l'arbre

Nous allons maintenant vérifier que cet arbre peut résister aux sollicitations.

Le diagramme des efforts et des moments permet souvent de déterminer la section de l'arbre la plus sollicitée.

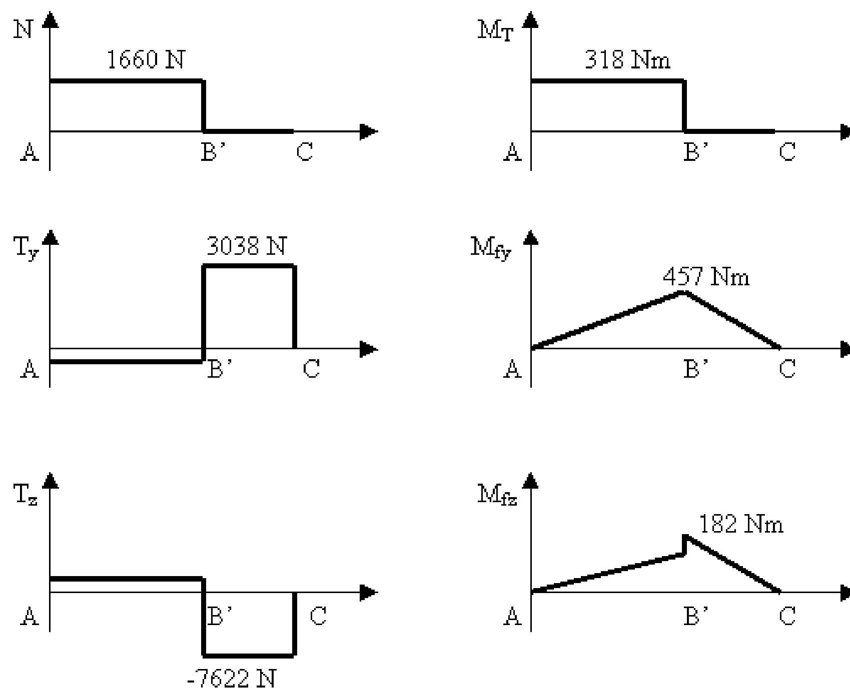


Figure 25 : diagramme des efforts et des moments

Il apparaît clairement ici que c'est en **B'** (projection de B sur l'axe x) que l'arbre est le **plus sollicité**. Autour du point B', ' l'accident' de section le plus important est l'épaulement de droite (passage de ∅53.2 à ∅43 avec un rayon de 0.5 mm). On va vérifier la tenue de cette section en statique et en fatigue avec les sollicitations maximales en B'.

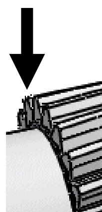


Figure 26 : Section de calcul

5. VERIFICATION EN STATIQUE

La section est soumise à :

$N = 1660$ N
T négligé
$M_f = (457^2 + 182^2)^{0.5} = 492$ Nm
$M_T = 318$ Nm

Les contraintes nominales associées sont (sur ∅43) :

$\sigma_t = 1660 * 4 / \pi / 43^2 = 1.14$ MPa
$\sigma_f = 32 * 492000 / \pi / 43^3 = 63$ MPa
$\tau = 16 * 318000 / \pi / 43^3 = 20.4$ MPa

Remarque : la contrainte σ_t est très faible devant les autres contraintes et pourrait être négligée. Le calcul étant effectué à titre d'exemple, σ_t est conservé.

Compte tenu de la géométrie proposée, on obtient :

$K_{tt} = 3.36$
$K_{tf} = 3.02$
$K_o = 2.3$

La contrainte maximale équivalente de Von Mises vaut ainsi :

$\sigma_e = [(3.36 * 1.14 + 3.02 * 63)^2 + 3 * 2.3^2 * 20.4^2]^{0.5} = 211$ MPa

Pour un acier 35CD4 trempé revenu Re = 550 MPa (chapitre B.2) et donc :

$\alpha_S = Re / \sigma_e = 550 / 211 = 2.6$

Il n'y a **pas de problème de tenu en statique**.

6. VERIFICATION EN FATIGUE

Au cours de la rotation de l'arbre, la contrainte de torsion et la contrainte de traction restent fixes, ce sont des contraintes moyennes. Par contre, la contrainte de flexion 'tourne' avec l'arbre, c'est une contrainte alternée. Les contraintes nominales sont donc (sur ∅43) :

$\sigma_{tm} = 1.14$ MPa
$\sigma_{fm} = 0$
$\tau_m = 20.4$ MPa
$\sigma_{ta} = 0$
$\sigma_{fa} = 63$ MPa
$\tau_a = 0$

On peut calculer les contraintes équivalentes :

$\sigma_{me} = (\sigma_{tm}^2 + 3\ \tau_m^2)^{0.5} = (1.14^2 + 3 * 20.4^2)^{0.5} = 35.3$ MPa
$\sigma_{ma} = K_{tf}\ \sigma_{fa} = 3.02 * 62.4 = 190.3$ MPa

Pour une section épaulée avec r = 0.5, d = 43, D = 53.2 :

$\chi_t = 2 / r = 4$
$\chi_f = 2 / r + 4 / (d + D) = 4.04$
$\chi_o = 1 / r + 4 / (d + D) = 2.04$

d'où :

$\chi_{me} = [(1.14*4)^2 + 3(2.04*20.4)^2]^{0.5} / [1.14^2 + 3 *20.4^2]^{0.5} = 2.04$

Pour un acier 35CD4 trempé revenu $R_m = 920$ d'où :

$R_{mp} = R_m\ (0.25\ \text{Log}\ (\chi_{me}) + 1.4\ ) = 920\ (0.25\ \text{Log}(2.04) + 1.4) = 1360$ MPa

Dans notre cas, le **nombre de cycle est supérieur à 10^7**, on peut donc calculer σ_{Dp} avec la formule :

$\sigma_{Dp} = K_S\ (a\ \text{Log}\ \chi_f + b)$

Avec un état de surface passable, on obtient $R_r = 20$ µm ce qui donne $K_S = 0.82$ (Figure 16).

Avec $R_m = 920$ MPa, on obtient a = 130/3 et b = 465 (Figure 20) d'où :

$\sigma_{Dp} = 0.82\ (130/3 * \text{Log}\ 4.04 + 465) = 403$ MPa

On obtient le diagramme de Haigh suivant :

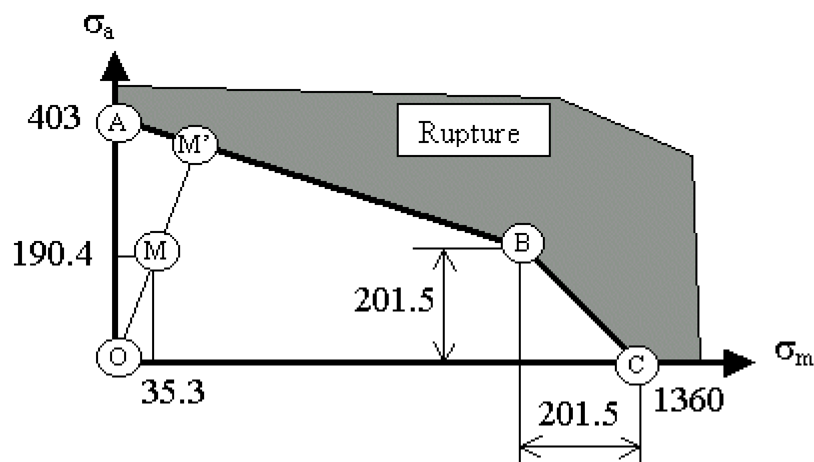


Figure 27 : Diagramme pratique de Haigh

On peut donc calculer le coefficient de sécurité en fatigue :

α_{FAB} = 1 / [190.3 / 403 + 35.3 / (2 * 1360 – 403)] = 2.05
α_{FBC} = 1360 / [190.4 + 35.3] = 6.02
α_F = Min (α_{FAB} ; α_{FBC}) = 2.05

L'arbre résiste en fatigue avec un coefficient de sécurité confortable. On notera que le coefficient de sécurité en fatigue est bien moins important que le coefficient de sécurité statique ce qui montre bien l'importance de la vérification de la tenue en fatigue des arbres.

F. EXERCICE 1 : VERIFICATION D'UN ARBRE

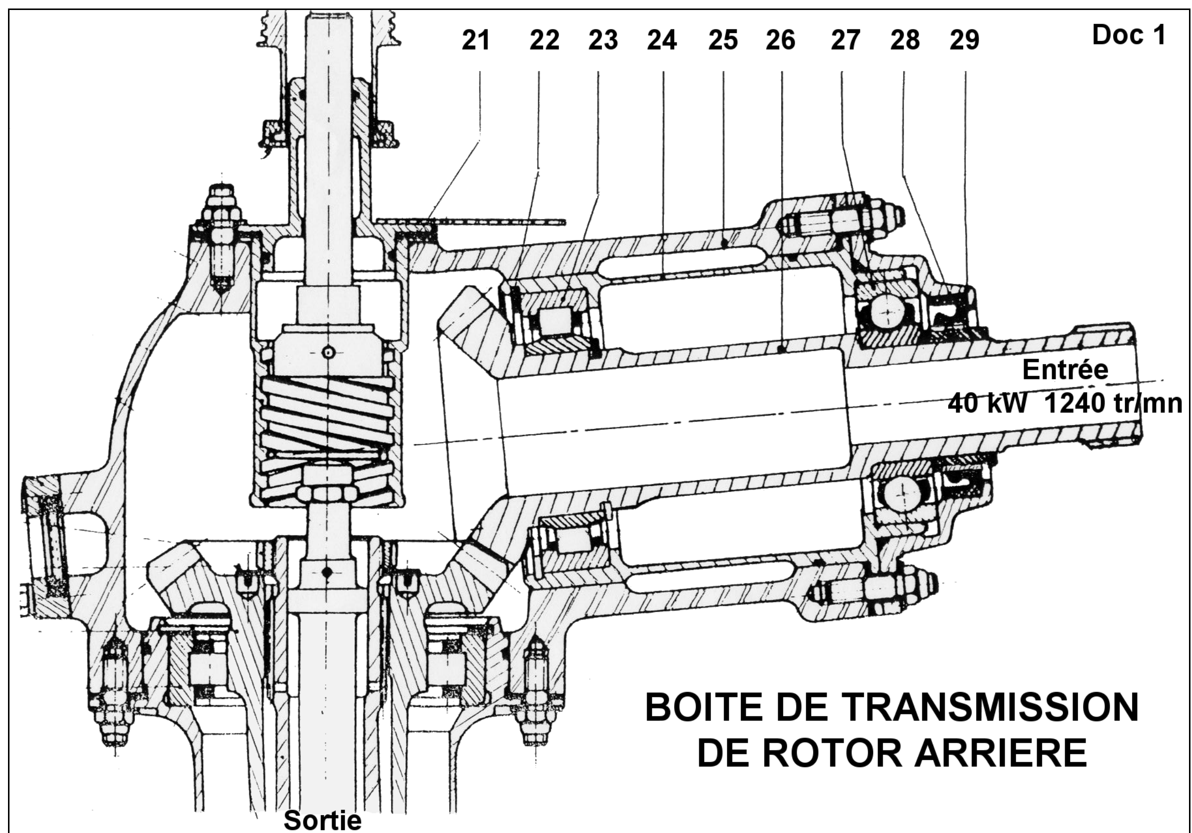
On se propose de vérifier l'arbre pignon 26 défini Doc 1 et 2 et appartenant au système de transmission d'un hélicoptère.
Cette pièce est réalisée en 34CrMo4, TH 850° RV 600°, de limite élastique Re = 610 MPa, de résistance à la rupture Rm = 810 MPa (valeurs minimales pour des pièces d'un diamètre compris entre 40 et 100 mm) et pour des conditions de rugosité Rt = 2µm. On peut considérer que l'accouplement transmet un couple pur C = 308 mN qui peut être considéré comme constant dans le temps.

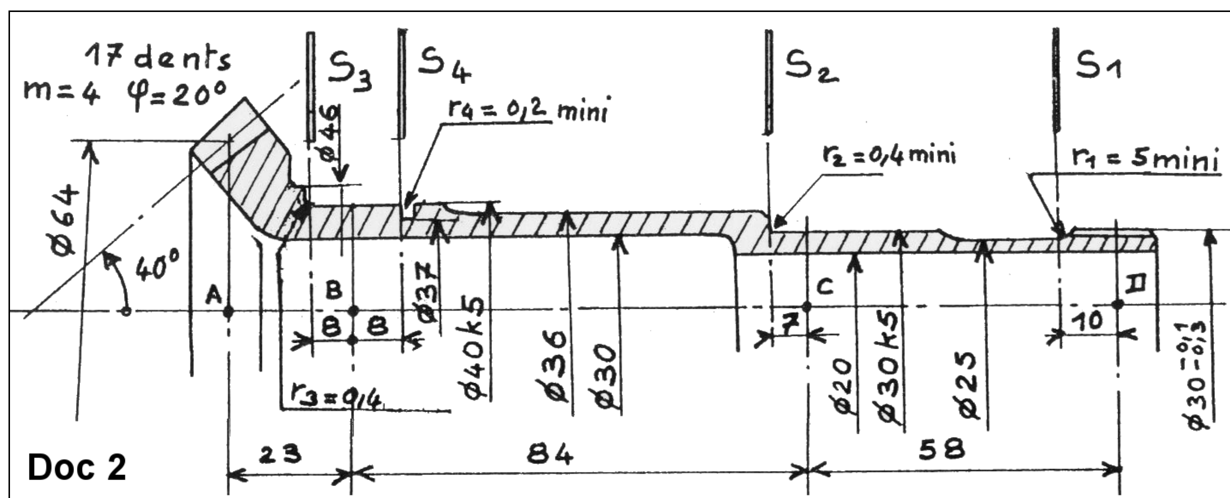
Vérifier la tenue de l'arbre creux (*hollow shaft*) dans les sections S_1, S_2, S_3, S_4 dans lesquelles le calcul des moments de flexion et de l'effort normal a donné les résultats suivants :

	Mf (Nm)	N (N)	Mt (Nm)
S_1	0	0	308
S_2	19.6	0	308
S_3	210	2380	308
S_4	224	2380	308

D'autre part, on désire un coefficient de sécurité statique et dynamique 2 et la durée de vie souhaitée est de 7000 heures. Dans le cas où ces coefficients de sécurité ne seraient pas vérifiés, vous proposerez les modifications les mieux appropriées.

Attention : il faut utiliser les formules de calcul de contraintes pour **arbres creux**.





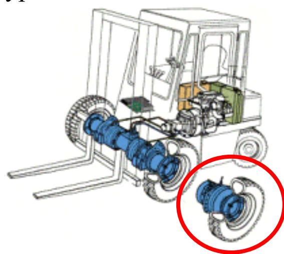
1. SECTION S1 : VERIFICATION EN STATIQUE

2. SECTION S : VERIFICATION EN STATIQUE

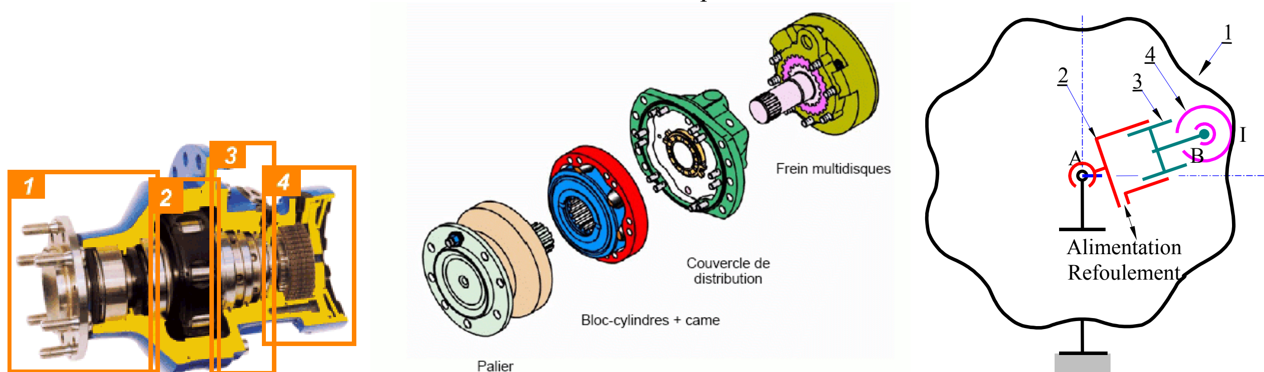
3. SECTION S : VERIFICATION EN FATIGUE

G. EXERCICE 2 : TRAJET DES ACTIONS MECANIQUES DANS UN ARBRE

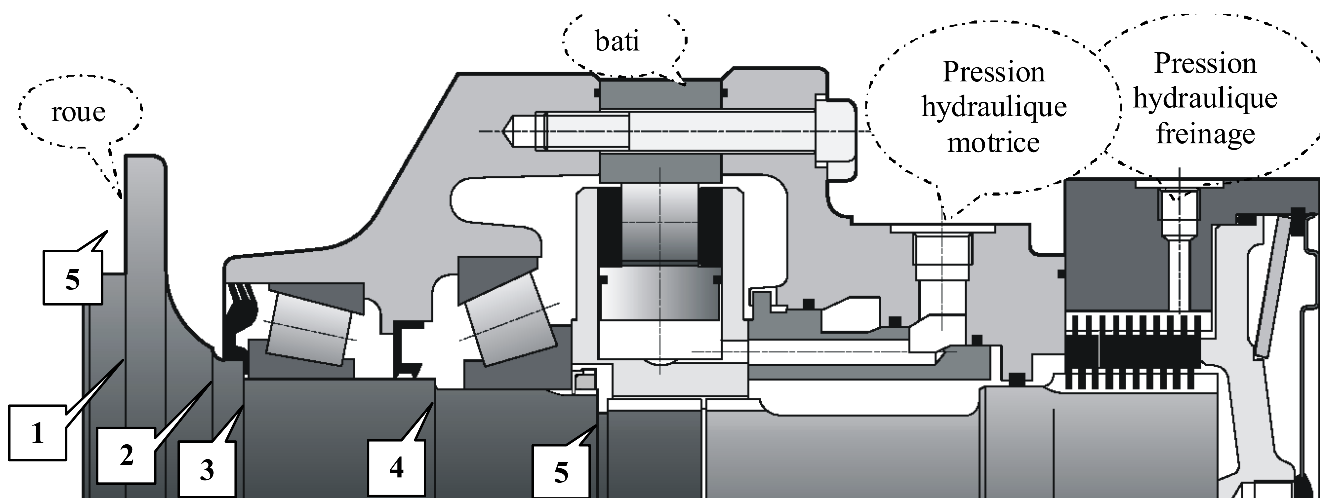
La société Poclain Hydraulics® développe un moteur hydraulique à pistons radiaux de nouvelle génération. Certains poids lourds ou engins de génie civil sont équipés de ce type de moteur.



Ce type de moteur est caractérisé de lent car la fréquence de rotation est de l'ordre de quelques centaines de tours par minute. Cette faible vitesse sous un couple maximal constant, permet d'entraîner les organes de machines lentes, directement, sans installer un réducteur avec un contrôle efficace de la vitesse et du couple.



L'arbre central présenté transmet le couple moteur à la roue du véhicule. Nous allons étudier le modèle d'arbre de sortie ci-dessous. La roue est fixée à l'arbre par l'intermédiaire de vis radiales.



Cet arbre est soumis à plusieurs actions mécaniques :

Action 1 : La précontrainte des roulements à contacts obliques.
Action 2 : Le poids du véhicule qui arrive par le carter.
Action 3 : Un couple venant du bloc cylindre
Action 4 : Une force axiale venant du bloc cylindre (les forces radiales venant des pistons sont équilibrées).

Pour chacune de ces actions mécaniques, complétez la figure ci-dessus en indiquant le point d'entrée, le point de sortie ainsi que son trajet dans le système. Vous indiquerez ensuite dans le tableau, parmi les 5 sections proposées, quelles sont celles qui sont sollicitées par l'action considérée (et que l'on doit prendre en compte dans le calcul).

	Section 1	Section 2	Section 3	Section 4	Section 5
Action 1					
Action 2					
Action 3					
Action 4					

PRESSION DE CONTACT LOCALISEE (THEORIE DE HERTZ)

A. CONTACT HERTZIEN

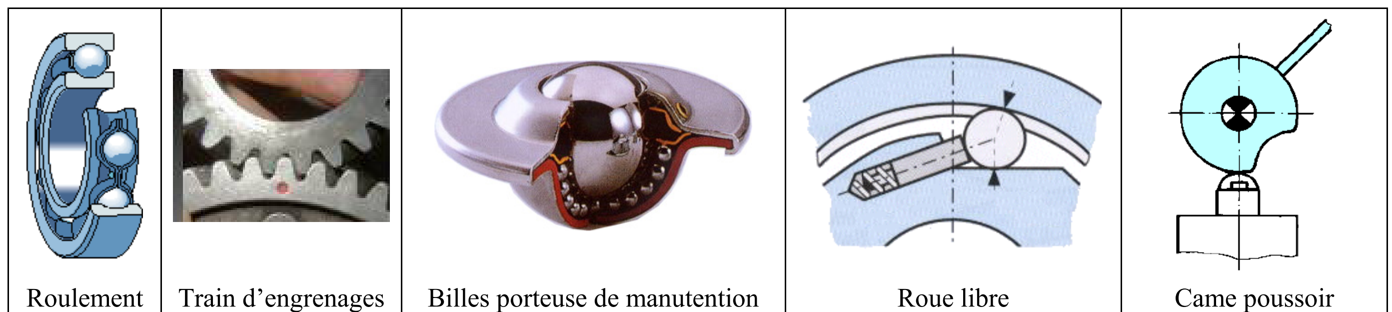
1. INTRODUCTION

Dans tous les mécanismes, la transmission des efforts en fonctionnement se fait par l'intermédiaire des surfaces de liaison entre les solides. La principale difficulté est d'associer à une surface de contact un modèle cohérent de pression de contact. On va rechercher quelques modèles simples dans le cas d'un contact où la surface commune est petite (***contact étroit***).
Ces modèles permettront d'estimer les contraintes de surface de manière à les comparer à des valeurs (pression conventionnelle de contact) déterminées empiriquement dans des cas similaires et dans certains cas de déterminer les contraintes au sein des matériaux.

Pour l'étude d'une pression engendrée sur de petites surfaces de contact (contact pseudo-ponctuel ou linéique), on dispose d'un modèle assez satisfaisant issu de la théorie de Boussinesq et de Hertz. Cette théorie ne traite que le cas des charges perpendiculaires aux zones de contact. La théorie de Hertz permet de déterminer :

a) les dimensions de la surface de contact ;
b) le rapprochement des deux solides ;
c) la pression de contact maximale ;
d) les contraintes engendrées en surface et en profondeur.

Les résultats de cette théorie ne sont pas sans erreurs, mais ils donnent un ordre d'idée qui permet avec l'expérience de dimensionner les liaisons ponctuelles ou linéiques et de choisir les matériaux et les traitements thermiques adaptés.
Pratiquement on rencontre ce type de contact : dans les roulements à billes (*ball bearings*) ou à rouleaux (*roller bearings*); au contact came poussoir (*Roller follower*) ; au contact d'un galet (*roller or wheel*) sur un rail (*guideways*) ; aux appuis des pièces dans les montages d'usinages (*machining fixtures*) ; dans les engrenages (*gears*); dans les chaînes de levage (*chain drives*) ; dans les roues libres (*Freewheel Clutches*)...



Roulement	Train d'engrenages	Billes porteuse de manutention	Roue libre	Came poussoir

2. HYPOTHESES DE TRAVAIL

La théorie du contact repose sur les hypothèses suivantes

- l'aire de contact est très petite par rapport aux surfaces latérales respectives des solides en contact ;
- les corps sont semi-infinis et assimilables à des ellipsoïdes de rayons de courbure $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R'_1}$ et $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R'_2}$;
- les rayons de courbure sont connus au point de contact ;
- les corps sont élastiques, homogènes et isotropes ;
- la surface de contact est plane ;
- le contact de fait sans frottement, et les solides sont sans mouvement relatif ;
- les matériaux composant les corps sont caractérisés par $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ modules d'élasticité longitudinale ; ν_1, ν_2 coefficients de Poisson.

On note : $k_i = \dfrac{1-\nu_i^2}{\pi . E_i}$

Le module de Young (*Young's modulus*) **E** et la valeur du coefficient de Poisson (*Poisson's ratio*) ν sont donnés dans le **tableau 1**.

3. RAYONS DE COURBURE (*radii of curvature*)

Convention :

- la courbure est positive pour une surface convexe, C = 1/R ;
- la courbure est négative pour une surface concave, C = - 1/R.

Pour l'exemple de la **Figure 1**, on obtient pour chacun des plans [P_1 et P'_1], [P_2 et P'_2] les courbures maximales $C_1 = 1/R_1$, $C'_1 = 1/R'_1$ et $C_2 = 1/R_2$, $C'_2 = 1/R'_2$ associés, respectivement, aux solides **1** et **2**.

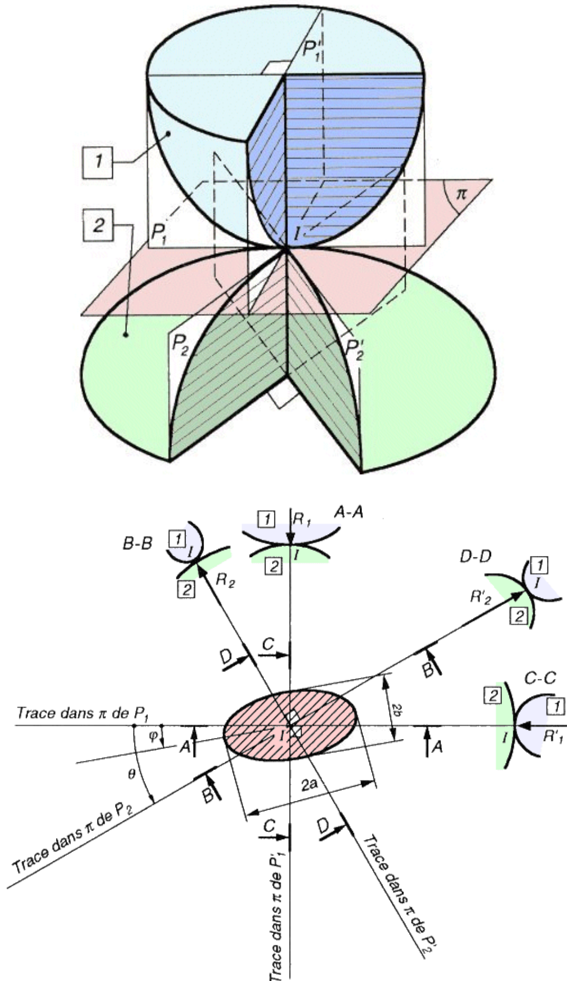


Figure 1 : Courbures principales

Matériau	E en MPa	ν
Acier	210 000	0,30
Acier inox 18-8	189 000	0,30
Aluminium	70 000	0,33
Argent	70 000	0,37
Cadmium	70 000	0,44
Chrome	252 000	0,30
Cuivre	112 000	0,34
Fer	210 000	0,30
Fonte	126 000	0,25
Laiton	112 000	0,33
Molybdène	329 000	0,31
Nickel	210 000	0,41
Or	70 000	0,42
Plomb	15 400	0,41
Titane	110 000	0,34
Tungstène	357 000	0,19
Zinc	91 000	0,28
Verre	46 200	0,24
Caoutchouc	1 500	0,50
Acétal	2 800	0,35
Plexiglas	3 160	0,40
Polycarbonate	2 320	0,38
Téflon	400	0,48
Nylon	1 100	0,34
Polyéthylène	760	0,46

Tableau 1 : Récapitulatif des valeurs de E et ν pour différents matériaux

De ces informations géométriques il est possible d'en déduire la surface elliptique commune de contact entre les deux solides. Cette surface est définie par les paramètres géométriques suivants :

$$a = m \cdot \sqrt[3]{\frac{3\pi(k_1 + k_2).N}{2(C_1 + C'_1 + C_2 + C'_2)}}$$

$$b = \frac{n}{m} a$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{(C_1 - C'_1)^2 + (C_2 - C'_2)^2 + 2(C_1 - C'_1)(C_2 - C'_2)\cos 2\theta}}{C_1 + C'_1 + C_2 + C'_2}$$

N représente l'effort normal au contact, **m** et **n** sont donnés sur des courbes (**Figure 2**) à partir d'un angle déterminé en fonction des rayons de courbure et de l'angle φ formé entre les plans P_1 et P_2.

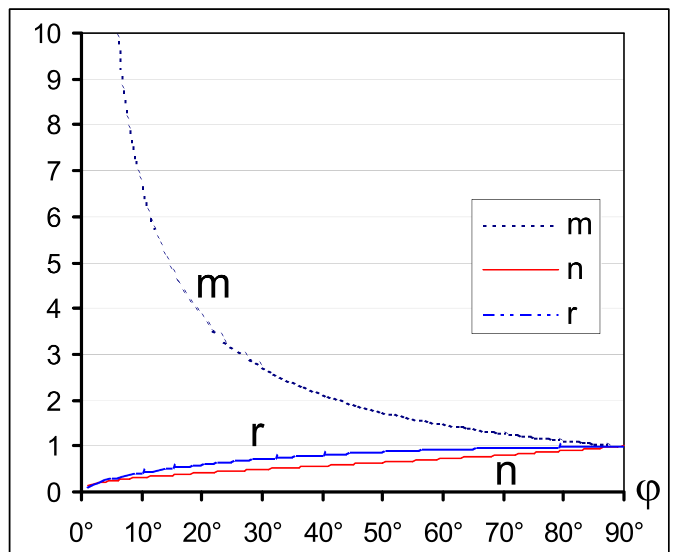


Figure 2 : **Valeur des coefficients m, n et r en fonction de φ**

B. CALCUL DES DIFFERENTS ELEMENTS

1. CONTACT PONCTUEL

1.1. Dimension de la surface de contact

La surface de contact, supposée elliptique, appartient au plan tangent π, elle sera déterminée si l'on connaît son grand axe 2a et son petit axe 2b (**Figure 1**).

1.2. Le rapprochement des deux solides

Le rapprochement δ des deux solides est la différence de distance prise perpendiculairement au plan π, de **deux points situés loin des zones de déformation**, entre la position initiale et la position finale.

$$\delta = r\,\frac{3\pi}{4a}(k_1 + k_2)N$$

La valeur du coefficient **r** est donnée en fonction de l'angle φ par la courbe de la **Figure 2**.

1.3. Pression de contact maximale

Si la déformation est connue, alors la théorie de l'élasticité permet de déduire le champ des contraintes. La déformation est modélisée selon un demi-ellipsoïde.

La répartition de pression se fait sur le même modèle :

$$\sigma = \frac{3N}{2\pi ab}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Au centre, en **I**, la déformation est maximale, il en est de même pour la pression de contact ;

$$p_{Max} = \sigma_{Max} = \frac{3N}{2\pi ab}$$

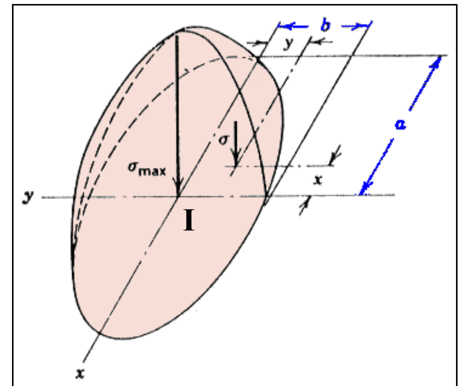


Figure 3 : **Modélisation de la pression de contact**

A la frontière la pression de contact est nulle (**Figure 3**).

On exprime aussi la pression maximale (**p_{Max}**) en fonction de la pression moyenne (**p_{moy}**), soit :

$$p_{Max} = \frac{3}{2}p_{moy} \qquad p_{moy} = \sigma_{moy} = \frac{N}{\pi ab}$$

1.4. Exemple : contact sphère/sphère

Soit deux sphères de rayons **R_1** et **R_2**, si l'on applique les différentes relations sur l'étude du contact sphère/sphère, on obtient les informations suivantes :

$C_1 = C'_1 = 1/R_1$

$C_2 = C'_2 = 1/R_2$

L'angle θ formé entre les plans principaux de courbures **P_1** et **P_2** vaut θ = 0°, soit φ = 90° et m = n = r = 1.

Les paramètres géométriques **a** et **b** sont égaux (a = b). L'aire de contact est un cercle de diamètre **2.a**, avec l'expression de **a** qui vaut :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3.\pi.(k_1 + k_2).N}{4(C_1 + C_2)}}$$

ou

$$a = \sqrt[3]{\frac{3.\pi.(k_1 + k_2).R_1.R_2.N}{4(R_1 + R_2)}}$$

La pression de contact maximale est égale :

$$p_{Max} = \frac{3N}{2\pi a^2}$$

ou

$$p_{Max} = 0{,}388.\sqrt[3]{\frac{N.(R_1 + R_2)^2}{(k_1 + k_2)^2.R_1^2.R_2^2}}$$

Le calcul du rapprochement δ devient :

$$\delta = \frac{3\pi}{4a}(k_1 + k_2)N \qquad \text{et} \qquad a^3 = \frac{3.\pi.(k_1 + k_2).R_1.R_2.N}{4(R_1 + R_2)}$$

d'où

$$\delta = \frac{a^2.(R_1 + R_2)}{R_1.R_2}$$

2. CONTACT LINEIQUE

2.1. Dimension de la surface de contact

La surface de contact, supposée rectangulaire, appartient au plan tangent π, de longueur $L = 2a = \infty$ et de largeur $l = 2b$ (**Figure 4**).

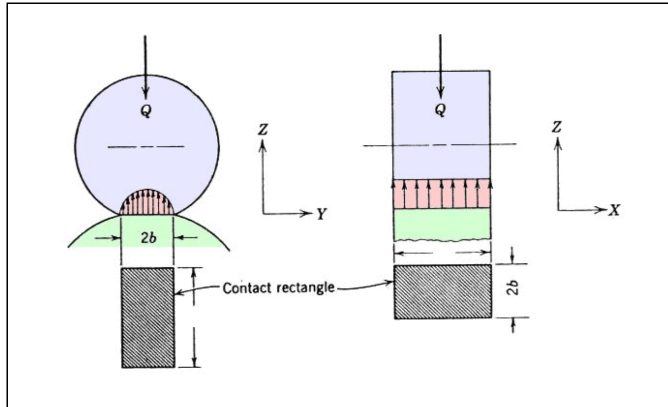


Figure 4 : **Surface de contact**

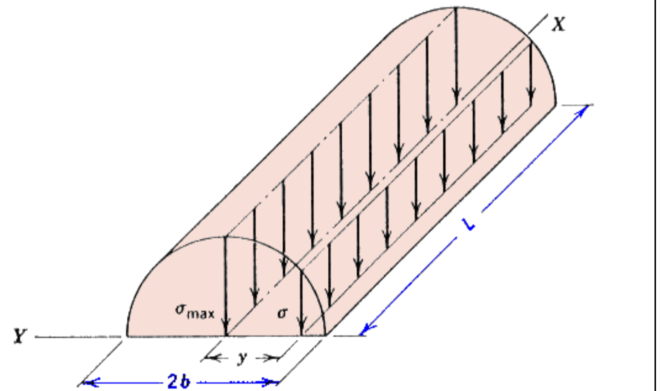


Figure 5 : **Répartition de pression**

2.2. Le rapprochement des deux solides

Dans la pratique, pour le contact linéique, la longueur des solides n'est pas infinie. La valeur théorique trouvée à partir des relations de Hertz ne correspond pas aux valeurs trouvées expérimentalement.

Pour un couple de matériaux métalliques, Arvid Palmgren donne des résultats plus proche de la réalité :

$$\delta = 3{,}84.10^{-5}\,\frac{N^{0{,}9}}{L^{0{,}8}}$$

N: effort normal en Newton;
L : longueur du contact en mm

2.3. Pression de contact

La répartition du champ de pression de contact est modélisée de manière uniforme dans le sens de la longueur et selon une demi-ellipse dans le sens de la largeur (**Figure 5**).

L'expression de la contrainte est définie par l'expression suivante :

$$\sigma = \frac{2N}{\pi Lb}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

La contrainte maximale (**p_{Max}**) est obtenue pour y = 0 soit :

$$p_{Max} = \sigma_{Max} = \frac{2N}{\pi Lb}$$

3. CONTRAINTES ENGENDREES

3.1. Contraintes de surface (*surface stresses*)

En surface, les contraintes normales sont égales à la pression de contact. Pour dimensionner et choisir les matériaux devant servir à réaliser les surfaces de contact, la première étape consiste à comparer la pression maximale à la pression admissible par le matériau soit : $p_{Max} \leq p_{adm}$.

Mais souvent ce type de calcul s'avère insuffisant, **parfois même, dangereux,** car la ruine des surfaces de contact a pour origine un écaillage provoqué par des contraintes de cisaillement au sein de la matière.

3.2. Contraintes en profondeur(*subsurface stresses*)

3.2.1. Contrainte de cisaillement maximale (τ_{Max})

La contrainte de cisaillement maximale (τ_{Max}) détermine la résistance pour un contact **purement statique**. Dans le cas de charges statiques il est possible d'admettre une pression admissible limite de 1,3 Rm (résistance à la rupture du matériau) à partir du critère de Von Mises.

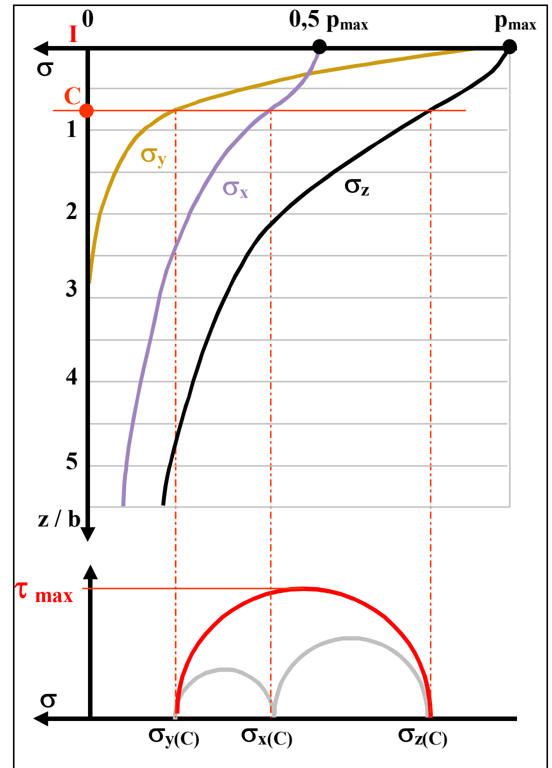


Figure 6 : Profondeur de τ_{Max} en fonction des dimensions de la surface de contact

Les lois de l'élasticité permettent de définir la variation des contraintes principales le long de la perpendiculaire en **I** au plan de l'ellipse d'appui.
La **Figure 6** représente la valeur de ces contraintes lorsqu'on descend dans la matière. On constate que leur évolution n'est pas parallèle. Leurs différences prises deux à deux donne la valeur des contraintes tangentielles, qui est différente selon le niveau auquel on se situe.

La **Figure 6** représente, aussi, les tricercles de Mohr associés à ces contraintes principales. Le tricercle de Mohr permet de définir les contraintes de cisaillement à différentes profondeurs.

$$\tau_{Max} \leq \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \qquad \tau_{Max} \leq \frac{\sigma_{adm}}{2} \text{ (critère de Tresca)}$$

La position (**IC**) et la valeur de la contrainte de cisaillement maximale (**τ_{Max}**) est fonction du type de contact :

- contact ponctuel IC = 0,467 a et τ_{Max} = 0,315 . p_{Max} ;
- contact linéique IC = 0,78 b et τ_{Max} = 0,3 . p_{Max}.

On peut ainsi choisir le matériau correspondant à ces caractéristiques. La **Figure 7** présente la distribution de ces contraintes transversales ainsi que la localisation de la contrainte transversale maximale (**τ_{Max}**).

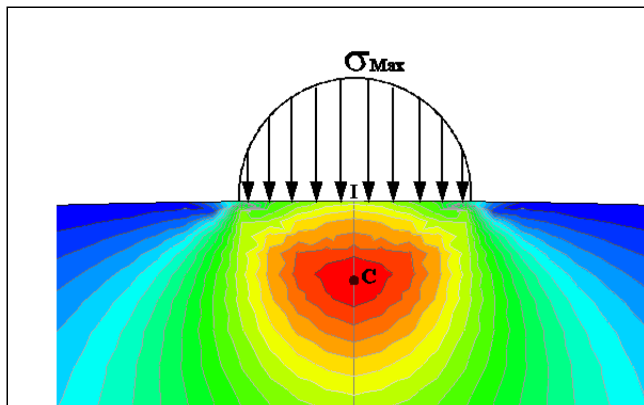


Figure 7 : Courbes d'iso contraintes τ_{Max}

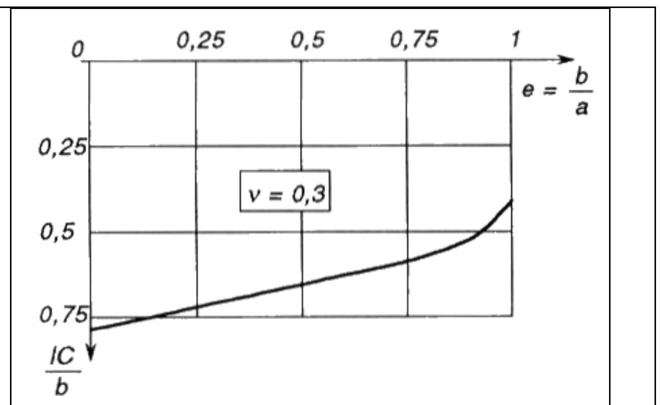


Figure 8 : Profondeur de τ_{Max} en fonction des dimensions de la surface de contact

Dans le cas de l'acier (ν = 0,3), on peut déduire cette profondeur directement à partir de la courbe représentée sur la Figure 8.

$e = \frac{b}{a} = 0$ contact linéique : $IC = \frac{\pi b}{4}$

$e = \frac{b}{a} = 1$ la surface de contact est un cercle: $IC \approx 0,5\ a$.

On utilisera la courbe de la Figure 8 pour définir l'épaisseur de la couche traitée. On fera en sorte que le point **C** se trouve largement en dessus de celle-ci de manière à limiter les risques de détérioration en sous couche.

3.2.2. contrainte de cisaillement τ_{zy}

La contrainte de cisaillement (*shear stress*) τ_{zy} a deux valeurs extrêmes pour des plans situés sensiblement aux extrémités du contact (**Figure 9**). Cette contrainte détermine la résistance dans le cas d'un contact avec roulement. La valeur et la position de cette contrainte est :

$\tau_{zy\ Max} = \pm\ 0,25\ .\ p_{Max}$ pour $z = -0,5\ a$ et $x = \pm\ 0,87\ a$

Ce cisaillement est appelé « ***cisaillement alternatif*** » et est fréquent dans les roulements. Ce phénomène crée une détérioration ***par fatigue*** du matériau avec un arrachement de particules métalliques (écaillage).

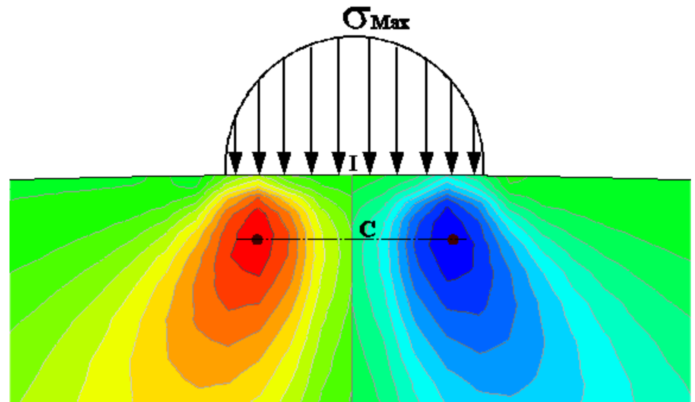


Figure 9 : Courbes d'iso contraintes τ_{zy}

4. RECAPITULATIF

Suivant le type de contact on peut résumer ces différents résultats sous la forme d'un tableau. Dans ce tableau on différencie les cas de liaison (ponctuelle ou linéique) et on présente les types de contact les plus usuels.

	Liaison ponctuelle			Liaison linéique	
Types de contact	Solides quelconques $C_1 = \frac{1}{R_1}$ $C'_1 = \frac{1}{R'_1}$ $C_2 = \frac{1}{R_2}$ $C'_2 = \frac{1}{R'_2}$ R_1, R'_1, R_2, R'_2 rayons de courbure principaux de 1 et 2.	Sphère/Sphère	Sphère/Plan $R_2 = \infty$	Cylindre/Cylindre	Cylindre/Plan $R_2 = \infty$
Surface de contact — Forme	**Ellipse** $k_i = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i}$	**Cercle**	**Cercle** rayon a	**Rectangle** longueur supposée ∞ ; largeur $2b$; q : charge par unité de longueur.	**Rectangle** longueur ∞ ; largeur $2b$; q : charge par unité de longueur.
Surface de contact — Dimensions	$a = m\sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}\frac{k_1+k_2}{C_1+C'_1+C_2+C'_2}N}$ $b = \frac{n}{m}a$ (voir tableau pour m et n)	$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}\frac{(k_1+k_2)R_1R_2}{R_1+R_2}N}$	$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}(k_1+k_2)RN}$	$b = 2\sqrt{(k_1+k_2)q\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}}$	$b = 2\sqrt{(k_1+k_2)qR}$
Rapprochement δ	$\delta = r\frac{3\pi}{4a}(k_1+k_2)N$ (voir tableau pour r)	$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16}\frac{(k_1+k_2)^2(R_1+R_2)}{R_1R_2}N^2}$	$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16}(k_1+k_2)^2\frac{N^2}{R}}$	$\delta = 3{,}84.10^{-5}\frac{N^{0,9}}{L^{0,8}}$ (acier)	
p_{max}	$p_{max} = \frac{3}{2}\frac{N}{\pi ab}$	$p_{max} = \frac{3}{2}\frac{N}{\pi a^2}$	$p_{max} = \frac{3}{2}\frac{N}{\pi a^2}$	$p_{max} = 0{,}59\sqrt{q\frac{E_1E_2(R_1+R_2)}{R_1R_2(E_1+E_2)}}$ si $\nu = 0{,}3$ $p_{max} = \frac{2q}{\pi b}$ $p_{max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{q}{k_1+k_2}\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}$	$p_{max} = 0{,}59\sqrt{\frac{q}{R}\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}}$ $p_{max} = \frac{2q}{\pi b}$ $p_{max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{q}{k_1+k_2}\frac{1}{R}}$
Profondeur pour τ_{max} $I_c = h$	Fonction de l'excentration de l'ellipse (pour $\nu = 0{,}3$)	$I_c = h$ $h \approx 0{,}5\,a$	$h \approx 0{,}5\,a$	$I_c = h = \frac{\pi b}{4}$ (pour $\nu = 0{,}3$)	$h \approx 0{,}78\,b$

Tableau récapitulatif des résultats de la théorie de Hertz

C. EXERCICE : PRESSION DE HERTZ - DEMARREUR DE REACTEUR

1. PRÉSENTATION

Le turbomoteur de démarrage a été conçu pour permettre la mise en route des réacteurs des avions, à partir du poste de pilotage, sans que soit nécessaire l'utilisation de dispositifs d'assistance au sol.
Il est essentiellement constitué :

- d'une turbine à gaz, appelé générateur de gaz, équipée d'un moteur électrique de lancement.
- d'une turbine de puissance et d'un réducteur de vitesse appelé démarreur.
- des accessoires nécessaires à la mise en oeuvre et à son contrôle.

Le démarreur permet d'amener le réacteur à une vitesse telle que l'allumage soit possible, puis accompagner la mise en route jusqu'à une vitesse correspondant à un couple moteur sensiblement supérieur au couple résistant.
Lorsque le réacteur atteint sa vitesse d'autonomie, l'alimentation en combustible est coupée et le démarreur se trouve automatiquement désaccouplé du réacteur.

Le démarreur représenté en plan d'ensemble est composé :

- d'une turbine à grande vitesse à deux roues (57) et (62) alimentée en **E**
- d'un réducteur de vitesse à train épicycloïdal
- d'une roue libre à galets débrayable automatiquement qui entraîne l'arbre du réacteur en S

2. QUESTIONS

2.1. Analyse globale

Etablir le schéma cinématique minimal du système complet et déterminer le rapport de réduction du réducteur

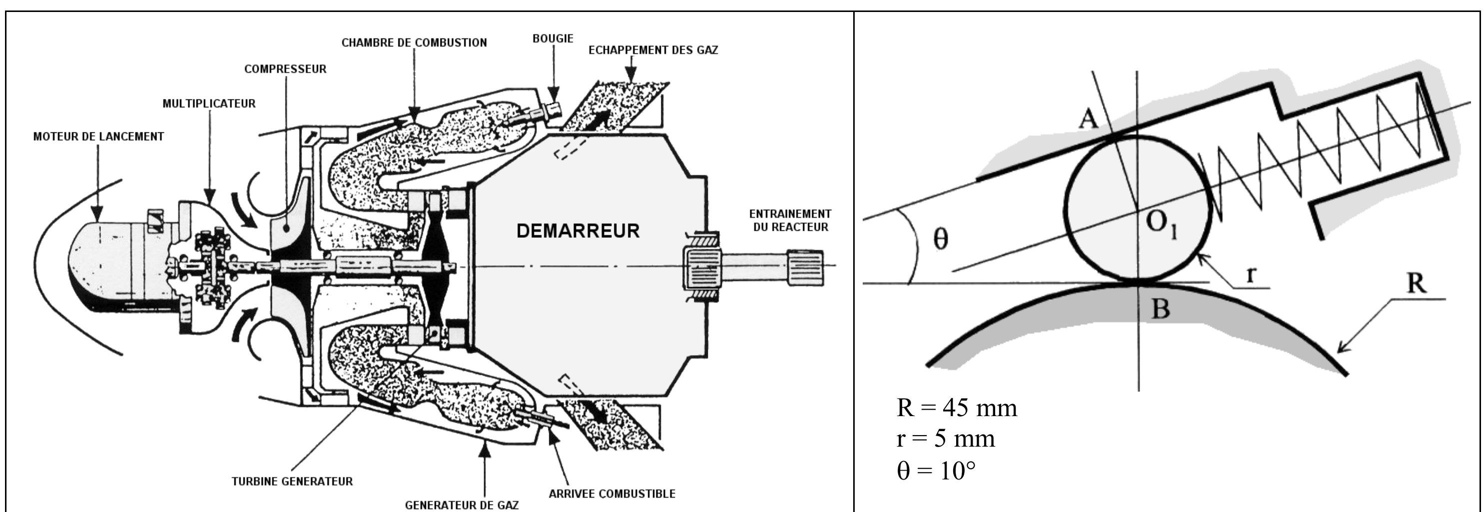
2.2. Etude de la roue libre

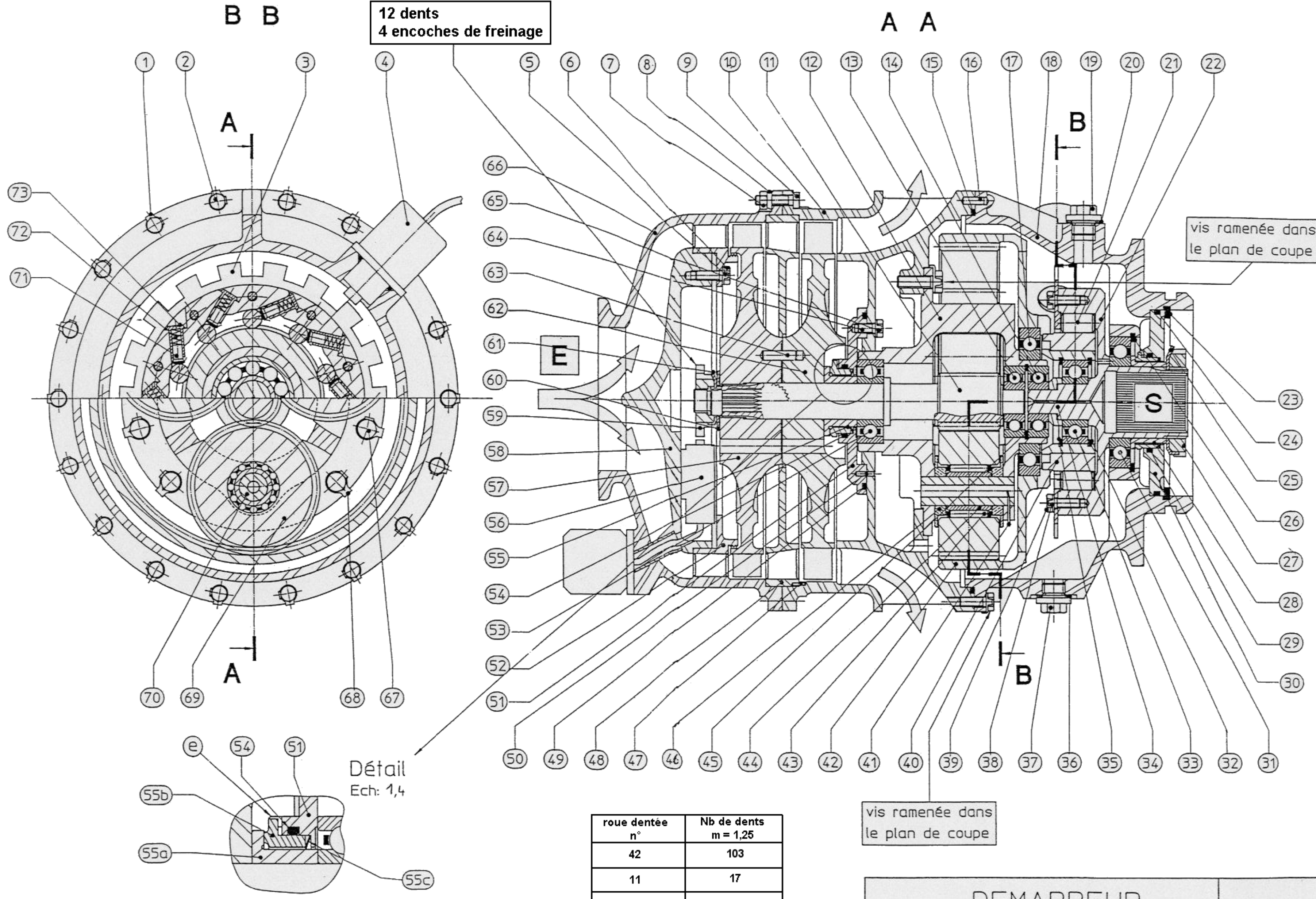
Etudier l'équilibre d'un galet et en déduire la relation liant l'angle θ, qui définit l'inclinaison du plan d'appui de la couronne par rapport au plan tangent à la bague intérieure et l'angle de frottement φ pris identique aux deux contacts.

Une rapide épure tenant compte de l'encombrement extérieur a montré la possibilité d'installer 10 galets de rayon r = 5 mm et de largeur l = 20 mm. Le couple maximal à transmettre est de 60 daNm.

Calculer la pression maximale de contact. Cette valeur vous paraît elle correcte ?
Quel matériau proposez vous d'utiliser pour les différentes pièces de la roue libre ?

On désire qu'à 2500 tr/min (vitesse de lancement), pour éviter tout frottement, le contact bague intérieure-galets soit supprimé. Sachant que la masse volumique des galets est $\rho = 7.8\ kg/dm^3$, que le paramètre de résistance au roulement d'un galet sur un plan peut être estimé à e = 0.01 mm, que le coefficient de frottement du ressort sur le galet est f = 0.l, calculer la force du ressort au moment du décollement du galet.





roue dentée n°	Nb de dents m = 1,25
42	103
11	17
69	43

3. REPONSES

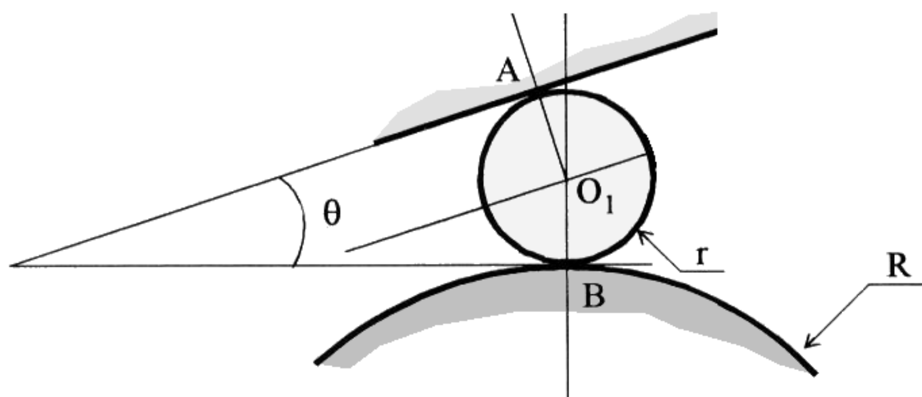
3.1. Analyse globale

3.1.1. Schéma cinématique minimal

3.1.2. Rapport de réduction du réducteur

3.2. Etude de la roue libre

3.2.1. Etude de l'équilibre d'un galet (sans ressort)



3.2.2. Relation liant l'angle θ et l'angle de frottement φ

3.2.3. Pression maximale de contact

Effort tangentiel requis

Effort normal associé

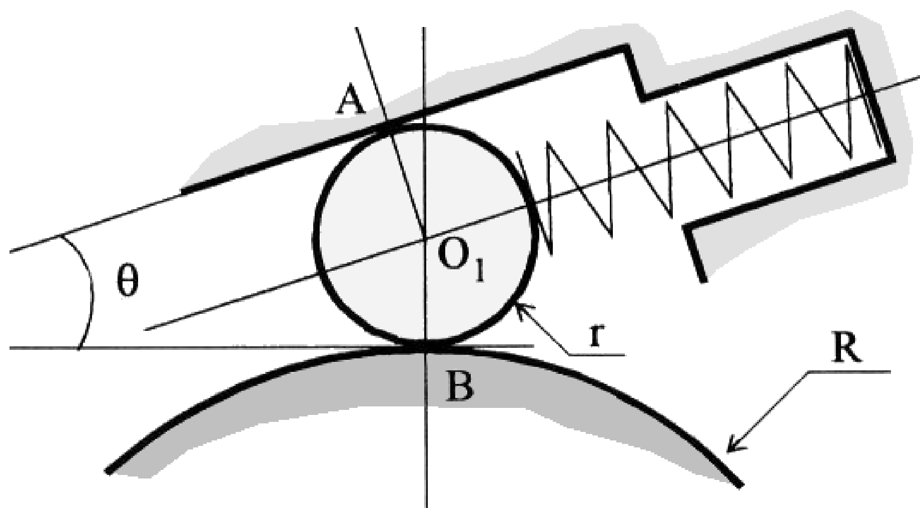
Largeur de contact

Profondeur du cisaillement maximal

Pression de contact maximale

Rm requis et choix du matériau

3.2.4. Etude du décollement d'un galet (avec ressort)



3.2.5. Force du ressort au moment du décollement

LES ROULEMENTS

BEARINGS

A. PRESENTATION

1. GENERALITES

Pour déplacer de lourdes charges, il est d'usage depuis fort longtemps d'utiliser des rouleaux ; l'effort horizontal de frottement étant alors diminué d'un facteur de 10 à 20. C'est par ce moyen que les Assyriens et les Egyptiens transportaient les blocs de pierre utilisés dans leurs constructions. La résistance au roulement remplaçait la résistance au frottement.

Ce principe est utilisé en construction mécanique sous forme de **Douilles à billes** (*Linear ball bearings*) dans les liaisons glissières**, Roulements** (*bearings*) dans les liaisons pivots, **Vis à billes** (*Ball screws*) dans les liaisons hélicoïdales. Les premières utilisations de ces composants datent de 1870, l'essor de l'automobile à partir de 1910 a favorisé leur développement.

En 1920 la normalisation commence. La technique du roulement est aujourd'hui à maturité, elle est soumise aux normes internationales... Composants de base d'un grand nombre de machines les roulements, moins de 1 mm à plus de 7 m, sont des pièces de précision et de qualité. Plusieurs milliards en sont fabriqués chaque année, les deux tiers sont des roulements à billes à gorges profondes.

2. FROTTEMENT/ROULEMENT.

Sous charge, la zone de contact entre chemin et élément roulant se comprime, puis se détend après passage, comme un ressort. En mouvement, il en résulte, devant l'élément roulant, la formation d'un bourrelet métallique s'opposant au mouvement. C'est le phénomène de résistance au roulement.

La **Figure 1** nous aide à comprendre pourquoi la résistance au roulement n'est pas nulle.

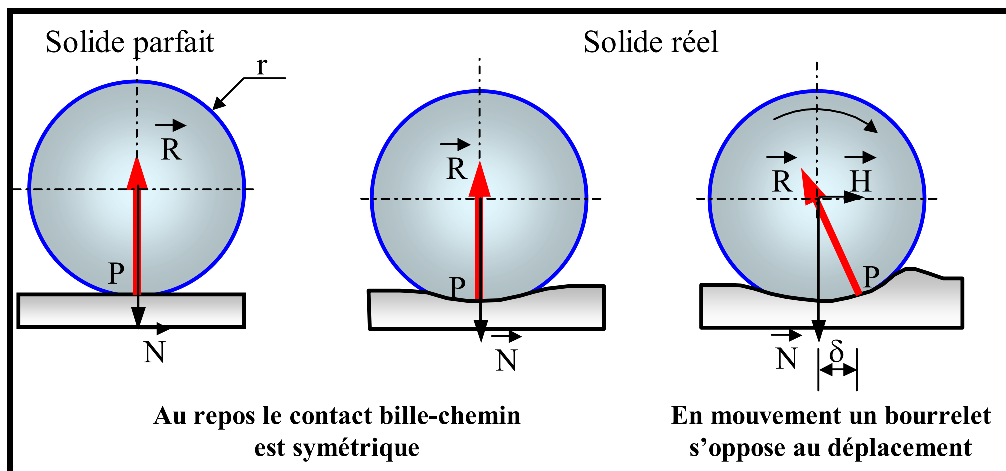


Figure 1 : Phénomène de résistance au roulement.

En effet, sans chargement, la bille est en contact ponctuel avec le plan en un point P. L'hypothèse de solides parfaits, au repos, est telle que pour tout chargement **N** appliqué sur la bille en son centre, le plan applique sur celle-ci une réaction **R**, d'intensité égale à l'intensité de **N**, et de direction opposée. Si la bille et le plan sont des solides réels, le contact bille/plan devient surfacique par déformation locale des deux solides. Au repos, la résultante des forces de pression plan/bille est toujours égale à **R**, et est centrée sur la zone de déformation. L'application d'un effort horizontal **H** sur la bille, en son centre, provoque une nouvelle répartition de pression plan/bille. Celle-ci à pour résultante une nouvelle force **R**, passant toujours par le centre de la bille, et équilibrant l'effort normal **N** et l'effort horizontal (tangentiel) **H**. Le point d'application de **R** se trouve donc déporté d'une valeur δ (paramètre de résistance au roulement) telle que :

$$N.\delta \approx H.r$$

L'augmentation de l'effort **H** peut se faire, la bille restant au repos, jusqu'à une certaine limite à laquelle correspond une valeur limite de δ (δ_{lim}). Le moment du couple résistant au roulement est donc :

$$C_f = N.\delta_{lim}$$

La valeur de δ_{lim} dépend des matériaux en présence, elle diminue lorsque la dureté des matériaux augmente. Pour information, le constructeur SKF propose dans son catalogue une relation globale introduisant le coefficient de frottement de roulement (*constant coefficient of friction for bearing*) (μ) en fonction du diamètre nominal (*bearing bore diameter*) (**d**) du roulement et de la charge appliquée (*normal load*) (**N**). L'expression du couple de résistance au roulement est :

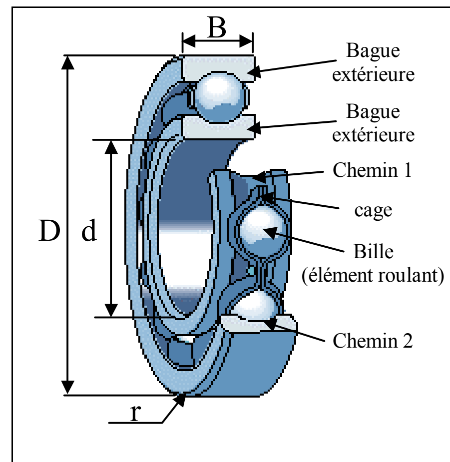
$C_f = 0,5.\mu.d.N$

Remarques : μ = 0,0015 pour les billes (*balls*), μ ≈ 0,002 pour les rouleaux (*rollers*), μ ≈ 0,004 pour les aiguilles (*needles*).
Ces valeurs sont à comparer avec le frottement interne des coussinets variant entre 0,05 et 0,15 suivant les réalisations : Nylon, PTFE...
À ce phénomène, s'ajoute aussi des frottements parasites supplémentaires (influences de la lubrification), entre éléments roulants et certaines parties des chemins. Mais cette étude sort du cadre de cet exposé.

3. TYPES DE ROULEMENTS.

3.1. Principaux éléments d'un roulement

La liaison par roulement est donc réalisée en intercalant entre l'arbre et l'alésage des éléments supplémentaires, les plus courants étant des billes. Une gorge torique est alors nécessaire pour recevoir ces billes, c'est le chemin de roulement. L'usure de ce chemin, et le couple résistant au roulement, imposent une grande dureté au contact avec les billes. Aussi place-t-on en insert des bagues, intérieure et extérieure, réalisées dans des aciers de haute qualité. Dans certain cas, si l'arbre et/ou l'alésage nécessitent des aciers ayant des caractéristiques mécaniques, et de traitement superficiel élevés, les bagues intérieure et/ou extérieure peuvent être supprimées. C'est le cas, par exemple, dans des boites de vitesses pour l'aéronautique où l'arbre est le support de pignons arbrés.
Le dernier élément constituant un roulement à billes standard est la cage, pièce en tôle emboutie en deux morceaux assurant un écart constant entre les billes.



En fonction des différentes remarques précédentes, le **Tableau 1** regroupe les principaux matériaux employé dans la réalisation des roulements.

Groupes d'aciers	Principales nuances normalisées NF EN IS0683-17
trempe à cœur	100 Cr6 ; 100 CrMnSi6-4 ; 100 CrMo7 ; 100 CrMo7-4...
cémentation	20 Cr3 ; 20 Cr4 ; 20 Cr4-2 ; 19 MnCr5 ; 20 CrMo4 ; 20 NiCrMo7...
trempe par induction	C56E3 ; 56 Mn4 ; 70 Mn4 ; 43 CrMo4
aciers inoxydables	X47Crl4 ; X65Crl4 ; Xl08CrMol7 ; X89CrMoV18-1
résistant à chaud	80MoCrV42-16 ; 13MoCrNi42-16-14 ; X75WCrV18-4-1 ...

Tableau 1 :Principales nuances d'acier employées dans la fabrication des roulements

Autres matériaux : oxydes d'aluminium, céramiques, etc. (T > 550 °C). Les cages des roulements sont fabriqués en acier, en polyamide, en bronze...

Lors du fonctionnement, les billes ont une rotation propre (mouvement de la bille/cage) ainsi qu'une rotation globale avec la cage, autour de l'axe de rotation de l'arbre. L'ensemble se comporte en fait comme un train épicycloïdal dont les satellites seraient les billes et la cage le porte satellite.
La géométrie même du contact intervenant dans les roulements à billes implique la présence du phénomène de frottement. Le remplacement des éléments roulants billes par des rouleaux cylindriques ou coniques (le sommet du cône étant évidemment sur l'axe de rotation du roulement) permet d'obtenir une vitesse de frottement nulle en tout point du contact.

3.2. Charges supportées par les roulements

Les actions mécaniques de contact exercées par les éléments roulants sur l'une ou l'autre bague sont en général schématisées par des forces ou des charges (**Figure 2**).
On observe trois cas :

Charge radiale (Fr) : sa direction, perpendiculaire à l'axe de rotation, passe par le centre géométrique du roulement. Fr est toujours portée par un rayon, d'où le nom de charge radiale (*radial load*).

Charge axiale (Fa) : sa direction est celle de l'axe de rotation du roulement (*thrust load*).

Charge combinée (F) : c'est la combinaison des deux cas précédents. La direction de **F**, quelconque, passe par le centre géométrique du roulement.
- La projection de **F** sur l'axe de rotation donne une composante axiale **Fa**.
- La projection de **F** sur un rayon perpendiculaire à l'axe donne une composante radiale **Fr**.

Remarque : Fa et **Fr** sont deux projections orthogonales possibles de **F**.

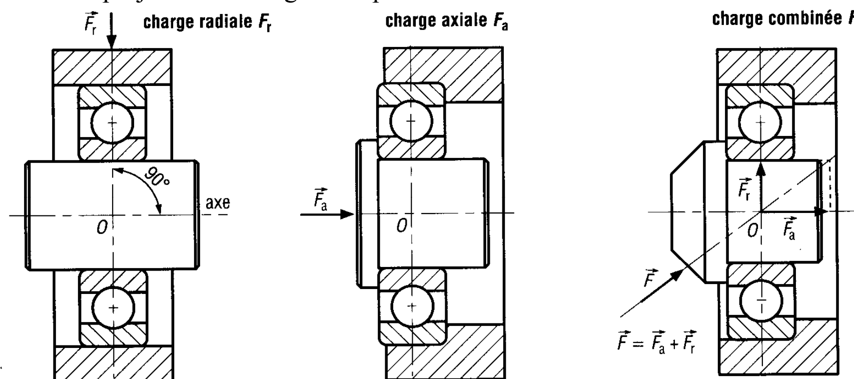


Figure 2 : Charges supportées par un roulement

3.3. Normalisation internationale des roulements (ISO)

Reprise par l'AFNOR, elle porte sur les dimensions, les tolérances de fabrication, les contrôles de qualités, les conditions d'utilisation, les méthodes de calculs et les accessoires utilisés écrous à encoches, manchons coniques...

3.3.1. Désignation

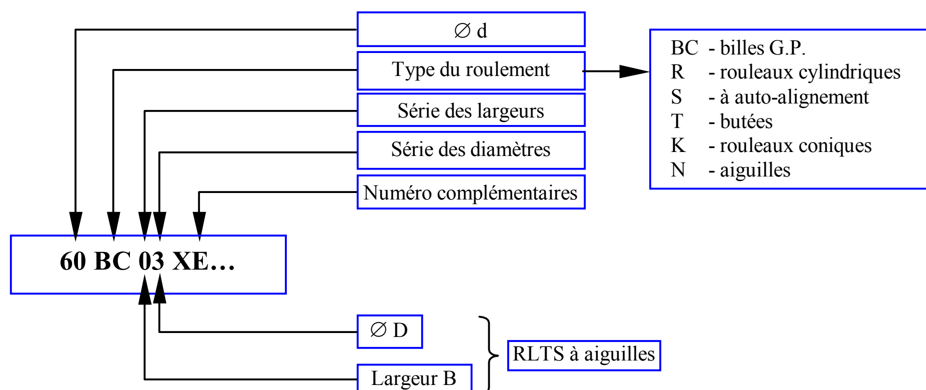


Figure 3 : Désignation normalisée des roulements.

Remarque : le numéro complémentaire précise les particularités : cages, flasques, joints, jeu interne, tolérances, lubrifiant, exigences spéciales...

3.3.2. Normalisation des dimensions

Les principales dimensions normalisées sont le diamètre de l'alésage du roulement (**d**), le diamètre extérieur (**D**), la largeur (**B**) et le rayon de l'arrondi des bagues (**r**). Pour un même alésage **d**, plusieurs **D** (séries : 7-8-9-0-1-2-3-4) sont possibles et inversement. Pour un même couple (**d** et **D**), plusieurs largeurs **B** sont possibles (séries de largeurs : 0-1-2-3-4) (**Figure 4**).

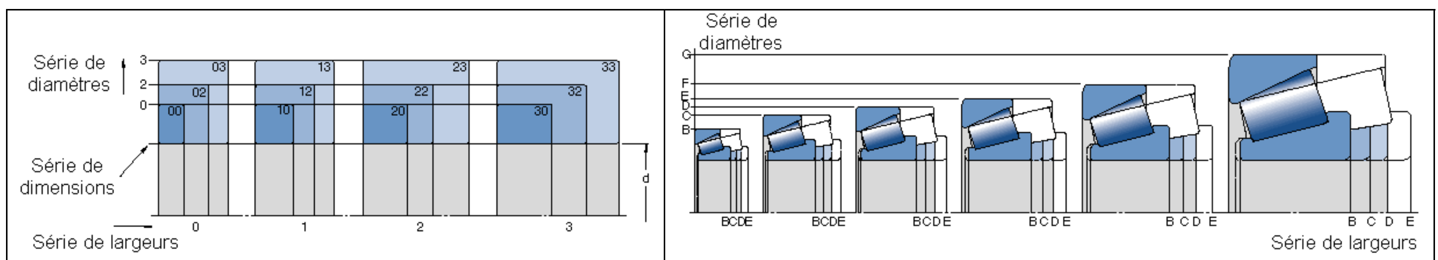


Figure 4 : Séries de diamètres et séries de largeurs.

3.3.3. Normalisation des classes de tolérances du jeu interne et des matériaux

Quatre classes de tolérances sont proposées : 0-6-5-4 avec des caractéristiques de plus en plus serrées en allant de 0 à 4. La classe 0 est la plus courante : roulements sans spécifications particulières. De la même manière il existe quatre catégories de jeu interne.

Pour chaque classe sont définies : la précision des dimensions (**d**, **D**, **B** et **r**), le voilage axial, le voilage radial, le faux rond et le parallélisme des faces latérales.

Les roulements sont de petits mécanismes montés en série et formant un ensemble indissociable (roulement à rouleaux coniques mis à part). Les règles de production en série font que toutes les billes (ou tous les rouleaux) pour une référence donnée doivent pouvoir se monter avec n'importe quel couple de bagues, ceci impose un jeu au niveau du montage. Ce jeu implique des degrés de liberté supplémentaires de l'une des deux bagues par rapport à l'autre.

En appairant les élément avant montage, il est possible de réduire ce jeu fonctionnel, cela entraîne un surcoût non négligeable. La désignation des roulements ayant un jeu autre que le jeu normal comporte un suffixe C1 à C5.

3.4. Différents types de roulements

Dans les montages réels, l'arbre ne peut être guidé par un seul roulement à cause entre autre du rotulage introduit par le jeu fonctionnel du roulement, de plus l'arbre est soumis à un ensemble d'actions mécaniques lui imposant des déformations. Ainsi, il se peut que la rotation de l'arbre par rapport à sa ligne neutre théorique au droit des roulements soit supérieure à l'angle de rotulage admissible par ceux-ci. Dans ce cas, il faudra avoir recours à des roulements à rotule (billes ou rouleaux en forme de tonneaux). La bague extérieure de ceux-ci ne sera plus cylindrique ou torique mais sphérique. L'angle restant toutefois limité afin d'assurer un contact permanent des éléments roulants sur la zone de roulement.

Roulements à Billes avec ou sans protection						
6206	6206-Z	6206-2Z	6206-RZ	6206-2RZ	6206-RS1	6206-2RS1
	Étanchéité par flasques		Étanchéité par joint à lèvres		Étanchéité par joint à frottement	
	Rotule à billes		**Contact oblique à billes**		**4 points de contact**	
	2206	11206 E	2206-C	3206	QJ 206	
Roulements à rouleaux cylindriques						
NU 206	NJ 206	NUP 206	N 206	NN 3006	NNU 4906	
Roulements à aiguilles						
RNA 405020	NA 405520	RHNA 404720	HNA 405220	NA4906 2RS	RK 4247 B	
Rotule sur rouleaux	**Roulements coniques**			**Butée à billes**	**Butée à rotule sur rouleaux**	
	30206			51206	29412 B	
Roulements combinées			**Galet de came avec axe**			
		234406 B	KR30			

Figure 5 : Types de roulements

La **Figure 5** donnent les différents types de roulements courants. Sur cette figure, sont également représentées des butées à billes et à rouleaux fonctionnant suivant le même principe, et assurant un arrêt en translation de l'arbre. Chaque roulement accepte un type de charge et admet un mésalignement plus ou moins important.

	Charges admissibles Radiale	axiale	combinée	**Aptitude à la vitesse**	**Espérance de vie**	**Rigidité sous couple de renversement**	**Aptitude au désalignement**	**Angle de rotulage**
	++	++	++	+++	+++	+	+	2 à 16'
	++	+++	+++	+++	+++	0	0	1 à 2'
	+++	++	++	++	+++	+++	+	≈ 0
	+	≈ 0	++	+	+	0	+++	2 à 4°
	0	+++	0	+	+	0	+	0
	+++	0	0	++	+++	0	+	1 à 7'
	+++	++	+++	++	+++	0	+	1 à 4'
	+++	+	++	+	++	0	+++	0,5 à 2°
	+++	0	0	+	++	+++	0	≈ 0
	+++ excellent		++ bon		+ passable		0 inacceptable	

Tableau 2 : Guide comparatif des principaux roulements

3.5. Type de chargement admissible.

L'effort supporté par chaque palier est transmis de l'arbre à l'alésage par l'intermédiaire des éléments roulants. Le type de contact va donc permettre une plus ou moins grande capacité de transmission. L'intensité de l'effort transmissible dépend des dimensions des éléments roulants. Nous verrons que cet effort est proportionnel à un coefficient **C**. Celui-ci est donné en exemple pour deux roulements, l'un à billes, l'autre à rouleaux. Il est clair que le contact ponctuel est limité par rapport au contact linéaire.
Le chargement radial d'un roulement à billes assure une position de contact dans l'axe de symétrie du roulement. La forme même du chemin de roulement (torique) autorise toutefois l'adjonction d'un effort axial, de sens quelconque, mais d'intensité limitée.
Le roulement à rouleaux cylindrique est de par sa géométrie, parfaitement apte à recevoir des efforts radiaux.
Les roulements à rouleaux coniques peuvent recevoir des efforts axiaux unidirectionnels et radiaux combinés. Afin d'assurer le contact de chaque élément roulant dans un tel roulement, donc de transmettre un effort normal à chaque élément roulant, il est nécessaire que la résultante de ces efforts, c'est à dire l'effort global appliqué au roulement, soit à l'intérieur du cône défini par la géométrie du roulement.
Le **Tableau 2** synthétise les capacités couramment admises pour les principaux roulements.

4. FABRICATION DES ROULEMENTS

La fabrication des roulements est une fabrication de série et fait appel à des machines spécialisées.

La réalisation des bagues commence par une opération de décolletage. Celle-ci consiste à réaliser plusieurs usinages simultanés sur des tours multibroches automatiques dans une barre d'acier : face, gorge, chanfreins. Les bagues sont ensuite reprises sur des tours automatiques pour réaliser les dernières opérations : usinage de la dernière face, des derniers chanfreins... Les bagues sont alors rectifiées au niveau du diamètre intérieur pour la bague intérieure (*inner ring*) et extérieur pour la bague extérieure (*outer ring*).

Après une opération de marquage, elles sont trempées (*quenched*) pour augmenter leur dureté superficielle (*hardening*), puis revenues pour relâcher les tensions internes. La rectification des faces et des chemins de roulement est alors effectuée. Les bagues n'ont plus qu'a être contrôlées.

Les billes sont ébauchées à partir de cylindres de fils d'acier par estampage dans des matrices hémisphériques. La bavure équatoriale est enlevée lors de la rectification des billes dans une rectifieuse rotative. Une gorge en spirale est réalisée entre les meules plateaux, les billes sont introduites par le centre d'un plateau, et sont rectifiées jusqu'à leur évacuation à la périphérie. Elle subissent un traitement thermique, puis une rectification finale. Enfin, elles sont contrôlées et calibrées par classe de diamètre.

Les cages sont réalisées par emboutissage d'un feuillard sur des presses automatiques à suivre.

Les dernières opérations sont des opérations de montage, lavage, huilage. Les roulements à billes courants sont montés par excentration de la bague intérieure, ce qui permet d'éviter la réalisation d'encoche de remplissage (**Figure 6**). Les deux demies cages sont alors rivées.

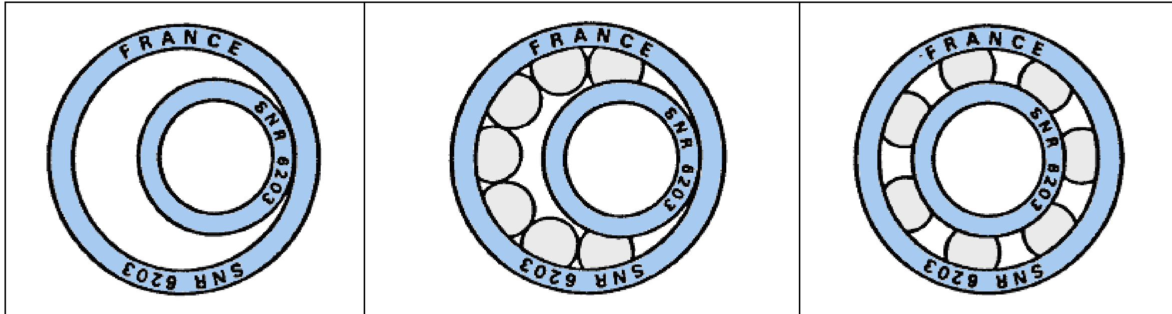


Figure 6 : Procédure d'assemblage d'un roulement à billes

La réalisation de roulements à rouleaux est identique, bien que les éléments roulants soient plus délicats à réaliser.

B. DIMENSIONNEMENT ET DUREE DE VIE DES ROULEMENTS

Pour déterminer un roulement, l'étude des efforts et de leur répartition sur les éléments roulants à l'arrêt est insuffisante. D'autres phénomènes interviennent et font que les roulements n'auront pas une durée de vie illimitée.

1. PHENOMENE DE FATIGUE

Nous avons vu précédemment qu'un corps roulant sur un autre implique l'apparition de forces au niveau du contact. Des composantes de celles-ci s'opposent au roulement. Pendant le roulement, la matière des deux corps en contact va être comprimée dans la partie avant et déchargée dans la partie arrière de la zone de contact. Il apparaît un bourrelet sur la bague, en amont des éléments roulants et qui se déplace avec ceux-ci, le même phénomène existe évidemment au niveau de l'élément roulant. Ainsi, la matière subit alternativement des pressions et des dépressions, d'où un phénomène de fatigue des pièces constituant le roulement, et à terme une détérioration de celles-ci par écaillage, conduisant à la ruine du roulement.
Le but de la méthode de calcul qui va suivre, est de définir la durée de vie des roulements.



Figure 7 : Exemples de mode de ruine par écaillage

2. DUREE DE VIE. (*bearing life*)

On appelle durée de vie d'un roulement, le nombre de tours (ou le nombre d'heures de fonctionnement à vitesse constante) que celui-ci peut effectuer avant l'apparition des premiers signes de détérioration par fatigue (écaillage) sur l'une des bagues ou l'un des éléments roulants.
Cependant, des expérimentations en laboratoire montrent que des roulements identiques, fonctionnant dans les mêmes conditions (même machine d'essai, même montage, même charge,...) n'ont pas la même durée de vie.
Il est de ce fait nécessaire de baser le calcul de durée sur l'évaluation statistique d'un grand nombre de roulements, soumis aux mêmes conditions de fonctionnement. C'est pour cela que l'on définit la ***Durée de vie nominale*** L_{10} du roulement. Celle-ci

correspond à la durée de vie minimale atteinte par 90 % des roulements d'une population prise dans un même lot de fabrication, lors d'un même essai.
De nombreux essais ont prouvé qu'une distribution du type **Weibull** peut être utilisée pour déterminer la durée de vie des roulements.
Les courbes expérimentales obtenues montrent que 50 % des roulements atteignent une durée de vie égale à 5 fois la durée de vie nominale.

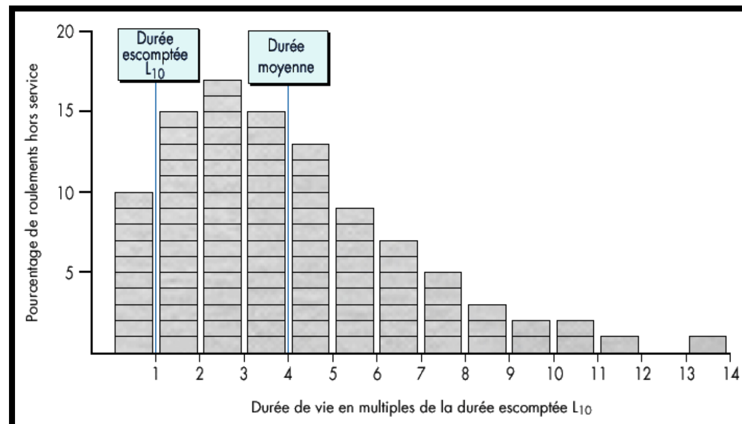


Figure 8 : Histogramme de la durée théorique de 100 roulements apparemment identiques soumis à des conditions de fonctionnement similaires.

Enfin, le pourcentage de 90 % a été adopté parce qu'il représente un bon compromis entre un fonctionnement sûr et un prix de revient acceptable.

3. METHODE DE CALCUL.

3.1. Durée de vie nominale L_{10}

L'expérience a permis de mettre en place une relation liant durée de vie et charge pour les roulements

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^n \qquad \text{ou} \qquad L_{10h} = \frac{10^6}{60.N}\left(\frac{C}{P}\right)^n$$

L_{10} : Durée de vie nominale en millions de tours.
L_{10h} : Durée de vie nominale en heures de fonctionnement
N : vitesse de rotation (en tr/mn)
C : Constante pour le roulement étudié, nommée Charge dynamique de base (en Newton) (*Catalog load rating*).
P : Charge dynamique équivalente appliquée au roulement (en Newton) (*dynamic equivalent radial load*).
n : constante dépendant de la nature du contact : 3 ponctuel (*ball bearings*), 10/3 linéique (*roller bearings*).

La durée de vie nominale est également nommée L_{10} en "mémoire" au 10 % de roulements qui sont défaillant avant d'atteindre sa valeur.

La charge dynamique de base **C** est la charge à appliquer au roulement dans les conditions de l'expérience, pour que celui-ci atteigne une durée de vie de 1 million de tours.

Exemple : Déterminer un roulement rigide à une rangée de billes devant tourner à 1000 tr/mn, sous une charge radiale constante de 3000 N, ayant une durée de vie nominale de 20 000 Heures de fonctionnement.
n = 3
P = 3000 N
L_{10} = 20 000.1000.60 = 1 200 Mtours
$C = P.L^{1/n}$ = 31 900 N

D'où le choix du roulement à l'aide d'un catalogue constructeur en fonction des diamètres de l'arbre et de l'alésage envisageables.

Les catalogues donnent en plus de la charge dynamique de base **C**, une charge statique de base $\mathbf{C_0}$. Celle-ci est utilisée pour le calcul des roulements en fonctionnement quasi-statique (arrêt, vitesse de rotation faible, faibles mouvements d'oscillation). Le constructeur la définit comme étant la charge pour laquelle la déformation permanente totale au contact éléments roulants le plus sollicité/bagues atteint 10^{-4} fois le diamètre de l'élément roulant. Son utilisation est en tous points identique à celle de **C**.

3.2. Durée de service pour les véhicules

Pour les véhicules routiers ou ferroviaires, notamment pour les roulements de roues, on exprime généralement la durée en kilomètres à l'aide de la formule :

$$L_{10s} = \frac{\pi D}{1000} L_{10}$$

dans laquelle :

L_{10s} : durée nominale, millions de kilomètres
D : diamètre de roue, mètres

3.3. Durée nominale des roulements oscillants

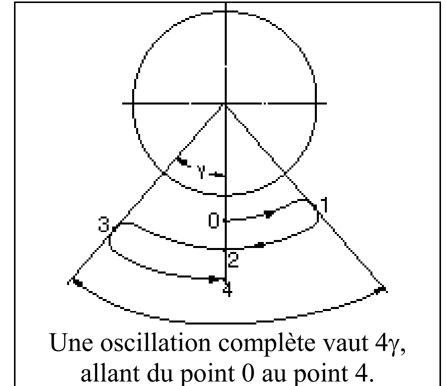
Si un roulement ne tourne pas mais oscille d'un angle de $\pm\gamma$ à partir d'une position centrale, on a :

$$L_{10osc} = \frac{180}{2.\gamma} L_{10}$$

où

L_{10osc} : durée nominale, millions de cycles
γ : amplitude d'oscillation (écart angulaire maximal depuis la position centrale), degrés

Il n'est pas opportun de calculer une durée nominale si l'amplitude d'oscillation γ est très faible.



Une oscillation complète vaut 4γ, allant du point 0 au point 4.

3.4. Durée nominale souhaitée

Lors du calcul des dimensions des roulements d'une machine, il est souvent difficile de déterminer la durée considérée comme nécessaire. Pour estimer cette durée, il faut avoir recours à l'expérience. Les valeurs rassemblées dans les **Tableaux 3** et **4** pour L_{10h} et L_{10s} donnent un ordre d'idée des durées de vie nominales souhaitables pour des mécanismes courants.

Type de machine	**L_{10h} heures de fonctionnement**
Appareils ménagers, machines agricoles, instruments, appareils médicaux	300 ... 3 000
Machines à fonctionnement intermittent ou de courte durée : Outils à main, rués de montage, machines utilisées dans le bâtiment	3000 ... 8 000
Machines à fonctionnement de courte durée avec grande fiabilité, ou à fonctionnement Intermittent pour lesquelles des arrêts accidentels sont à éviter: Ascenseurs et monte-charges, ponts roulants de magasins	8000 ... 12 000
Machines prévues pour un service de huit heures par jour en fonctionnement intermittent: Réducteurs de vitesse à usage général, moteurs électriques stationnaires, concasseurs giratoires	10000 ... 25 000
Machines prévues pour un service de huit heures par jour en fonctionnement continu: Machines-outils, machines à travailler le bois, machines de production en général, grues de parcs, ventilateurs, bandes transporteuses, machines d'imprimerie, centrifugeuses	20000 ... 30 000
Machines à fonctionnement continu (24 heures par jour): Réducteurs et cages à pignons de laminoirs, moteurs électriques stationnaires, compresseurs, pompes, ascenseurs de mines, machines textiles	40000 ... 50 000
Stations de pompage, fours rotatifs, machines de câblage, machines de propulsion des navires	60000 ... 100 000
Machines à fonctionnement continu (24 heures par jour) avec grande fiabilité: Grosses machines électriques, centrales électriques, pompes et ventilateurs de mines, paliers d'arbre de couche de navires	≈ 100 000

Tableau 3 : Durées normalement souhaitables pour différents types de machines

Type de véhicule	**L_{10s} millions de km**
Roues de véhicules routiers :	
Voitures particulières	0,3
Camions, autocars	0,6
Essieux de véhicules ferroviaires:	
Wagons (type UIC, charge maximale constante sur l'essieu)	0,8
Véhicules de transport urbain et suburbain	1,5
Voitures de grandes lignes	3
Autorails de grandes lignes	3 ... 4
Locomotives diesel ou électriques de grandes lignes	3 ... 5

Tableau 4 : Durées normalement souhaitables pour différents types de véhicules

4. CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT PARTICULIERES.

Ce que nous venons de voir n'est vrai, que si l'on se trouve dans des conditions de fonctionnement similaires à ceux réalisées en laboratoire : avec des charges constantes, des vitesses constantes, une fiabilité de 90 %, des conditions de fonctionnement (température et donc lubrification) normales.
Dans la réalité, ces conditions ne sont pas toujours respectées, cela impose l'utilisation de coefficients de corrections.

4.1. Influence de la température de fonctionnement.

La température augmentant, la dureté superficielle du matériau diminue, cela se traduit par une diminution de la capacité de charge du roulement.
Pour en tenir compte, les constructeurs corrige la charge dynamique de base C par un coefficient δ_θ approprié du **Tableau 5**.

$C_\theta = \delta_\theta . C$

θ °C	≤ 125°	150°	175°	200°	225°	250°	275°	300°
δ_θ	1	0,96	0,92	0,88	0,82	0,75	0,68	0,60

Tableau 5 : Coefficient correctif de température

4.2. Durée de vie corrigée

L'emploi de la formule de durée est approprié dans tous les cas d'applications classiques, où la durée nominale L_{10} prise en considération est basée sur l'expérience et tient compte, par conséquent, de facteurs non explicités tels que la lubrification.
Afin de tenir compte de conditions de fonctionnement particulières on utilise la relation adoptée par ISO en 1977 :

$$L_{na} = a_1\, a_2\, a_3\, L_{10}$$

L_{na} : durée corrigée, millions de tours (l'indice n représente la différence entre 100 % et la fiabilité considérée)
a_1 : un facteur de correction relatif à la fiabilité *(reliability)*
a_2 : un facteur de correction relatif à la matière (*bearing material*)
a_3 : un facteur de correction relatif aux conditions de fonctionnement

4.2.1. Influence de la fiabilité (facteur a_1)

Les essais effectués sur un grand nombre de roulements identiques et dans des conditions semblables ont montré que leur durée de vie était différente. En y appliquant la théorie statistique des probabilités, on constate que la dispersion concorde avec une loi de Weibull et s'exprime sous la forme :

$$F = e^{\ln 0{,}9 . (L/L_{10})^{\beta}}$$

Avec

L : durée de vie de service ou de fonctionnement
L_{10} : durée de vie nominale
F : fiabilité (probabilité pour qu'un roulement atteigne ou dépasse la durée de vie L)
β : exposant de dispersion (β ≈ 1,5)

De là, nous définissons le facteur de fiabilité $\mathbf{a_1}$ comme étant le rapport entre la durée de vie $\mathbf{L_n}$ correspondant à une fiabilité de n % (> 90 %), et la durée de vie nominale L_{10}.

$$a_1 = \left[\frac{\ln(F)}{\ln(0{,}9)}\right]^{(1/\beta)}$$

F : fiabilité souhaitée en % (>90 %)
β : exposant de dispersion (β ≈ 1,5)

Soit :

F %	90	95	96	97	98	99
$\mathbf{a_1}$	1	0,62	0,53	0,44	0,33	0,21

Enfin, dans le cas d'un système composé d'un ensemble de roulements, la fiabilité globale du système est égale au produit des fiabilités de chacun des composants.

$$F_{globale} = \prod_{i=1}^{n} F_i$$

4.2.2. Influence de la matière (facteur a_2)

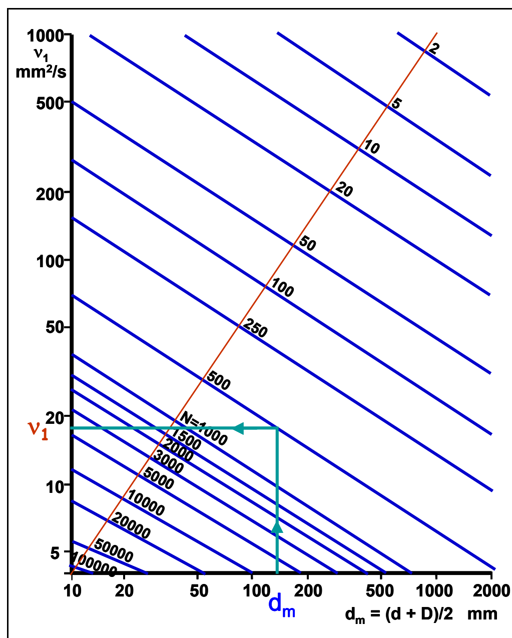
Dans la détermination de la charge dynamique de base, il est clair que le matériau intervient (dureté).
De même, un coefficient $\mathbf{a_2}$ permet de caractériser la dureté de la matière par rapport à celle de référence ($\mathbf{a_2} = 1$).
Donc $\mathbf{a_2} > 1$: dureté supérieure à celle de référence,
$\mathbf{a_2} < 1$: dureté inférieure à celle de référence.

4.2.3. Influence de la lubrification (facteur a_3 et a_{23}) (*lubrication*)

Encore une fois nous allons faire appel à un coefficient fonction principalement de l'efficacité du lubrifiant (épaisseur de film d'huile suffisante entre les surfaces en contact). Ce facteur est défini comme étant le rapport κ entre la viscosité (*viscosity*) cinématique ν du lubrifiant utilisé, et la viscosité cinématique ν_1 nécessaire pour assurer une lubrification convenable, valeurs prises à la température de fonctionnement. Dans la majorité des cas, en raison de l'interdépendance de ces notions, les influences des matière, lubrification et température sont regroupées dans un coefficient $\mathbf{a_{23}}$ unique.

La détermination de ce coefficient $\mathbf{a_{23}}$ se fait en utilisant les abaques 1, 2 et 3 fournis par les constructeurs de roulements, ainsi que par le choix d'une classe de viscosité selon l'ISO (Tableau 6). En conclusion, la durée de vie corrigée s'écrit :

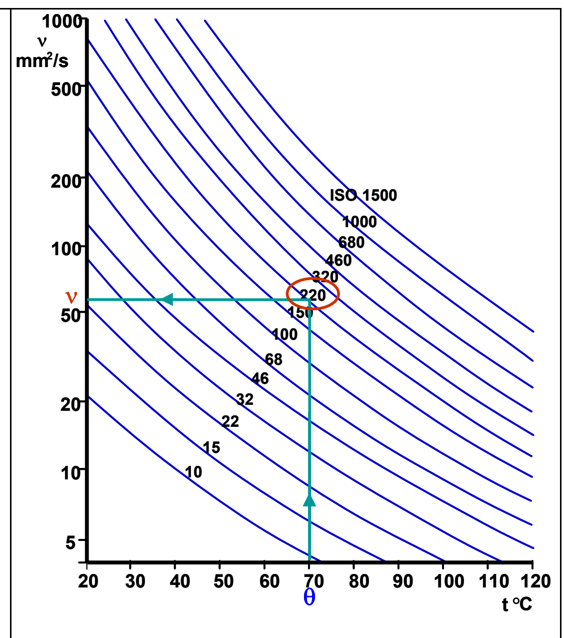
$$L_{na} = a_1.a_{23}.L_{10}$$



Abaque 1 : Viscosité de fonctionnement préconisée

Classe de viscosité	Viscosité cinématique à 40°C		
	moyenne	min	max
ISO VG 2	2,2	1,98	2,42
ISO VG 3	3,2	2,88	3,52
ISO VG 5	4,6	4,14	5,06
ISO VG 7	6,8	6,12	7,48
ISO VG 10	10	9,00	11,0
ISO VG 15	15	13,5	16,5
ISO VG 22	22	19,8	24,2
ISO VG 32	32	28,8	35,2
ISO VG 46	46	41,4	50,6
ISO VG 68	68	61,2	74,8
ISO VG 100	100	90,0	110
ISO VG 150	150	135	165
ISO VG 220	220	198	242
ISO VG 320	320	288	352
ISO VG 460	460	414	506
ISO VG 680	680	612	748
ISO VG 1 000	1 000	900	1 100
ISO VG 1 500	1 500	1 350	1 650

Tableau 6 : Classe de viscosité selon ISO

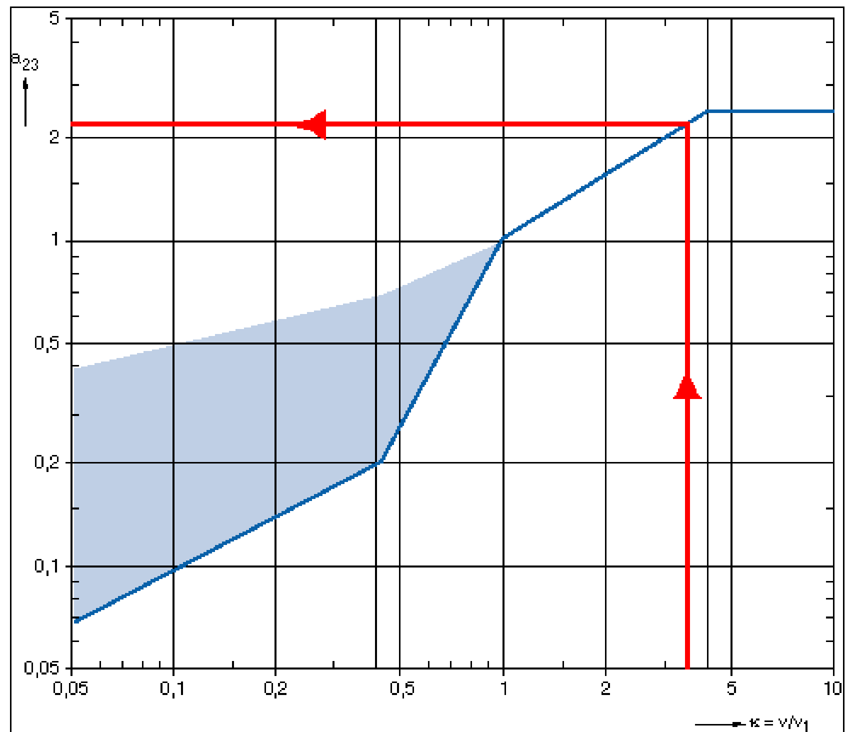


Abaque 2 : Evolution de la viscosité en fonction de la température

Exemple :
Nous allons déterminer les valeurs des coefficients $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_{23}}$ et la valeur de la durée de vie corrigée d'un roulement à rotule sur rouleaux en acier standard 22318 CC/W 33 fonctionnant à 500 tr/mn, à une température de 70 °C, avec une huile ISO VG 220, sous une charge radiale constante de Fr = 50 000 N, avec une fiabilité souhaitée de 98 %.

Dimensions du roulement :
d = 90 mm (Ø arbre)
D = 190 mm (Ø alésage)

- dm = (d+D)/2 = 140 mm (dm :diamètre moyen du roulement)
- ***1ier abaque :*** dm = 140 mm et N = 500 tr/mn → $\nu_1 \approx 18$ mm²/s
- ***2ème abaque :*** la viscosité ν de l'huile choisie (ISO VG 220) à la température de fonctionnement de 70 °C→$\nu \approx 58$ mm²/s
- → soit : $\kappa = \nu/\nu_1 = 3{,}27$
- ***3ème abaque :*** $\kappa = 3{,}27 \rightarrow \mathbf{a_{23}} = 2{,}19$
- f = 98 % → $\mathbf{a_1} = 0{,}33$



Abaque 3

Le catalogue nous donne C = 477 000 N, donc la durée de vie nominale corrigée L_{2a} vaut :

$$L_{2a} = 0{,}33.2{,}19.\left(\frac{477000}{50000}\right)^{(10/3)} = 1331 \text{ Mtours}$$

soit à une vitesse constante de 500 tr/mn, une durée de vie de L_{2h} = 44360 heures.

4.3. Influence de la variation de la charge au cours du temps.
Nous continuons à travailler avec une charge radiale pour les roulements, et axiale pour les butées.
Les expériences dont nous avons parlé précédemment nous ont permis de travailler à partir d'une charge **P** constante au cours du temps, exercée sur le roulement. Lorsque cette charge devient variable, il est alors nécessaire de calculer une ***charge dynamique équivalente*** afin de se ramener dans les conditions de validité de la méthode de calcul précédente.

La charge dynamique équivalente se définit donc comme étant la charge fictive qui répond aux hypothèses définies pour la charge dynamique de base, et dont l'influence sur la durée de vie serait la même que celle des charges agissant réellement.
Nous allons calculer la charge équivalente ($\mathbf{P_{éq}}$) pour les quatre cas suivants :

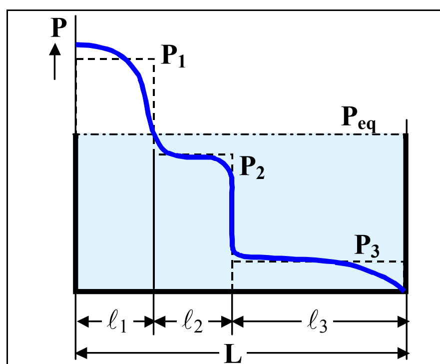


Figure 9 : Cas 1 et 2

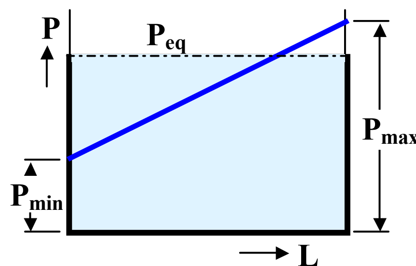


Figure 10 : Cas 3

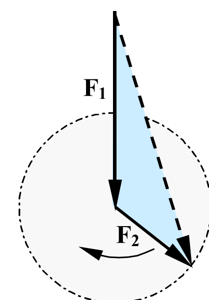


Figure 11 : Cas 4

__Cas 1 :__
Il est possible de décomposer le diagramme de la charge réelle en un certain nombre de régions pour lesquelles la charge peut être considérée comme constante. Dans ces conditions :

- ℓi : durée d'application de la charge pour la région i.
- Pi : charge pour la région i.
- L_i : durée de vie nominale de fonctionnement sous P_i avec $L_i = (C/P_i)^n$.
- L : durée de vie nominale globale pour $P_{éq}$ avec $L = (C/P_{eq})^n$.

Nous pouvons dire que sur chaque région, nous consommons une partie de la capacité de charge dynamique du roulement. Soit λ_i la fraction de détérioration,

$\lambda_i = \ell i / L_i$

La détérioration est considérée totale lorsque $\Sigma_{(i=1 \text{ à } n)} \lambda_i = 1$ (Loi de Miner). Donc :

$$\lambda_i = \frac{\ell_i}{(C/P_i)^n} \qquad \Sigma \ell_i . P_i^n = C^n \text{ or} \qquad L = \Sigma \ell i$$

Donc : $$P_{éq} = \left[\frac{\Sigma \ell_i . P_i^n}{\Sigma \ell_i} \right]^{(1/n)}$$

Cas 2 :
La charge a une variation continue, alors :

$$P_{éq} = \left[\frac{\int_0^L P_i^n . d\ell_i}{L} \right]^{(1/n)}$$

Cas 3 :
Alors que la vitesse est constante, la charge varie de façon linéaire ou quasi linéaire entre une valeur mini et une maxi, dans ces conditions :

$$P_{éq} = \frac{P_{min} + 2P_{max}}{3}$$

Cas 4 :
La charge varie de façon périodique, alors la charge équivalente de l'ensemble des périodes est égale à la charge équivalente d'une période.

Si la charge se compose, suivant la **Figure 11**, d'une charge $\mathbf{F_1}$ constante en intensité et en direction (poids d'un rotor par exemple) et d'une charge tournante $\mathbf{F_2}$ constante en intensité (balourd par exemple), on peut calculer une charge moyenne $\mathbf{F_m}$ par la relation suivante :

$F_m = f_m (F_1 + F_2)$

Le coefficient $\mathbf{f_m}$ est donné par la **Figure 12**.
Si la direction de la charge est celle des conditions de définition de la charge de base, la charge dynamique équivalente s'écrit $\mathbf{P} = \mathbf{F_m}$. Sinon, on calcule à l'aide de la formule générale dans laquelle on prend pour **Fr** la composante radiale et pour **Fa** la composante axiale de la charge moyenne $\mathbf{F_m}$.

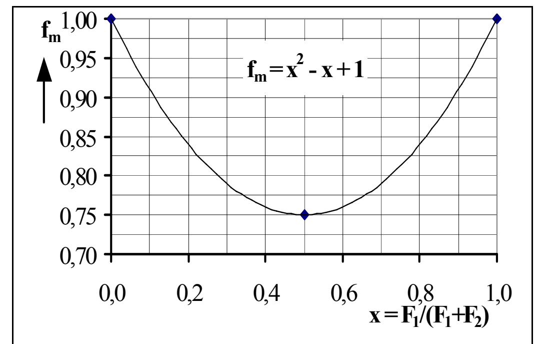


Figure 12 : coefficient f_m

5. CHARGE EQUIVALENTE

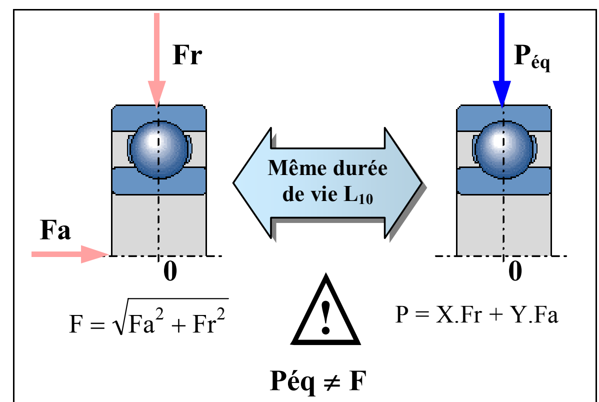
Pour fonctionner de façon satisfaisante, un roulement doit toujours être soumis à une charge minimale donnée.
Une règle générale pratique indique que des charges correspondant à 0,02.C doivent s'exercer sur les roulement à rouleaux, et 0,01.C sur les roulements à billes. La présence de cette charge est d'autant plus nécessaire que le roulement est soumis à de fortes accélérations et que les vitesses avoisinent ou dépassent 75 % des vitesses de base mentionnées dans les catalogues constructeurs.

5.1. Calcul dynamique

Etudions maintenant le cas ou **P** est quelconque, c'est-à-dire pas nécessairement radiale pour les roulements, ou axiale pour les butées.
Comme précédemment, nous allons être amené à déterminer une charge équivalente $\mathbf{P_{éq}}$. D'une façon générale :

$P_{éq} = X.Fr + Y.Fa$

$P_{éq}$: Charge dynamique équivalente (*dynamic equivalent radial load*)
Fr : Composante radiale de la charge (*radial load*).
Fa : Composante axiale de la charge (*thrust load*).
X : Coefficient radial du roulement.
Y : Coefficient axial du roulement.



Le graphique de **Figure 13** représente l'ensemble des charges quelconques qui confèrent au roulement la même durée de vie. Ces courbes sont essentiellement expérimentales.

L'extrémité des vecteurs $\mathbf{OF_i}$ associés à chacune des charges décrit la ***courbe d'équidurée*** du roulement.

Pratiquement, et parce que jusqu'à ces dernières années, l'outil informatique était encore peu répandu dans les bureaux d'étude, on remplace cette courbe par deux segments qui minorent les capacités réelles du roulement. Ces segments mettent en place :

- L'angle β qui permet de définir le paramètre **e** tel que : tanβ = e
- Les coefficients X et Y tels que :
  Peq = X.Fr + Y.Fa

L'étude des rapports Fa/Fr et Fa/C_0 par rapport à **e** permet à l'aide des catalogues de déterminer les valeurs de X et Y.

Nous allons traiter le calcul de $\mathbf{P_{éq}}$ dans les cas suivants :

- Roulement rigide à billes.
- Roulement à rouleaux cylindriques.
- Roulement à rotule sur rouleaux ou sur billes.
- Butée à bille simple effet.
- Butée à rotule sur rouleaux.
- Roulement à contact oblique (billes ou rouleaux).

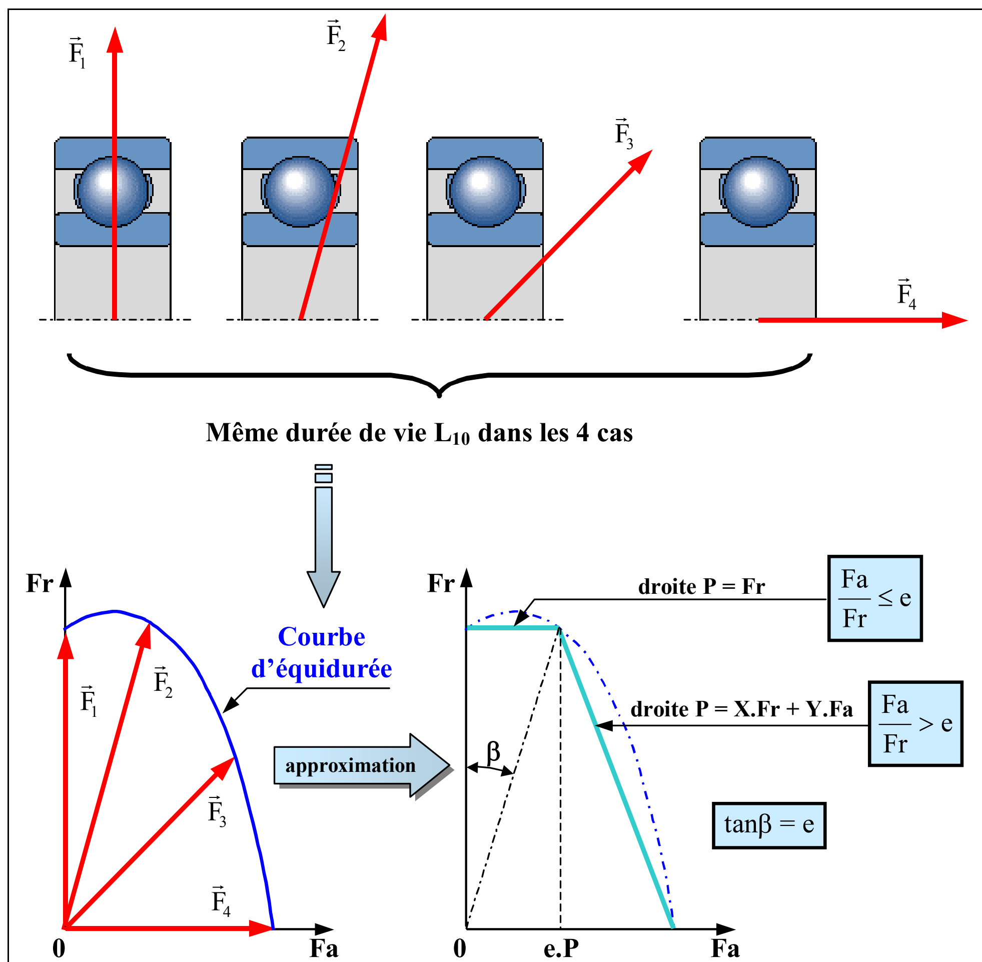
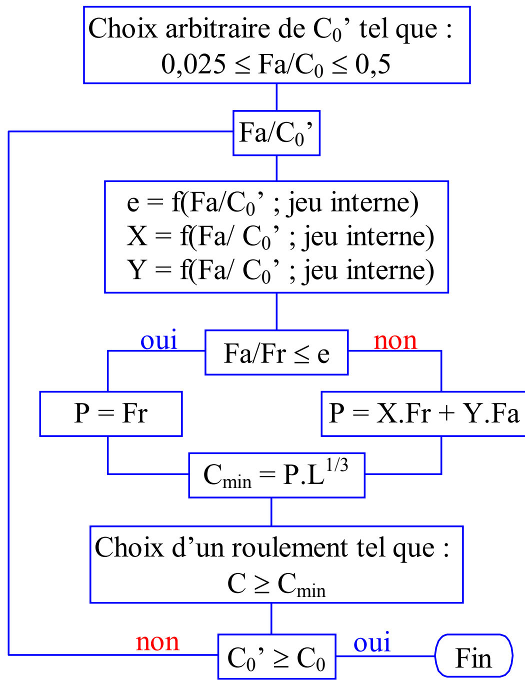
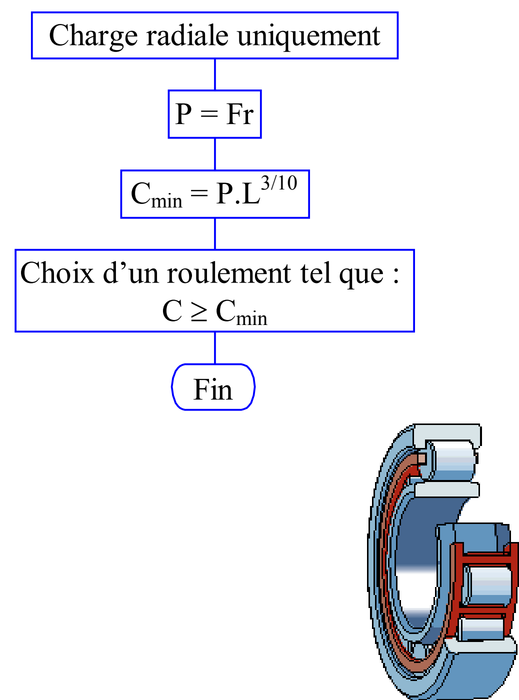


Figure 13 : Principe des courbes d'équidurée

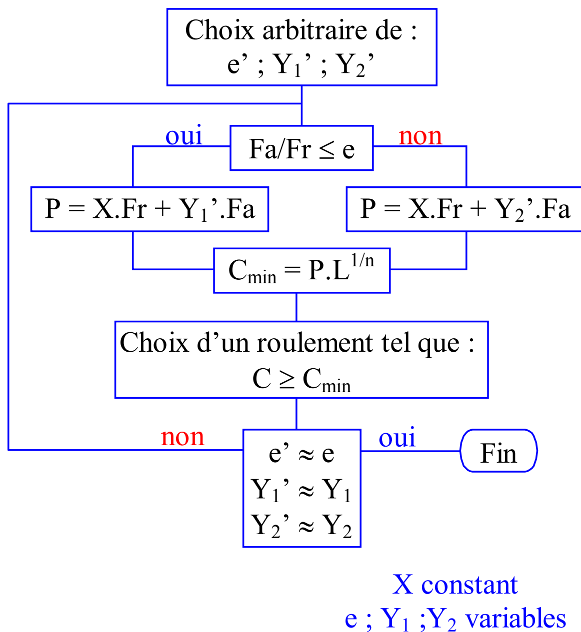
Roulement rigide à billes



Roulement à rouleaux cylindriques

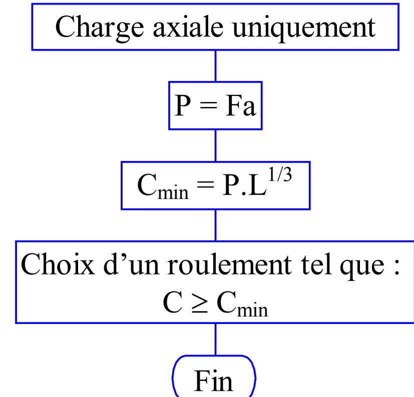


Roulement à rotule sur rouleaux ou sur billes

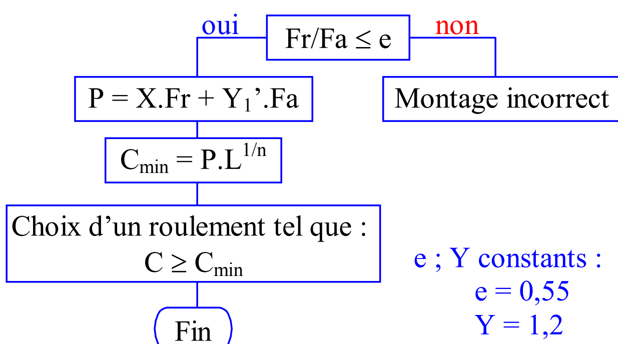


X constant
e ; Y_1 ;Y_2 variables

Butée à bille simple effet



Butée à rotule sur rouleaux



e ; Y constants :
e = 0,55
Y = 1,2

Roulement à contact oblique

Le calcul de $\mathbf{P_{éq}}$ est ici plus complexe parce que ces roulements sont montés par paire.
Nous appellerons ici **Ka** et **Kr** les charges extérieures appliquées au montage.

Les charges radiales $\mathbf{Fr_i}$ appliquées aux centres de poussée des roulements induisent dans ceux-ci des charges axiales $\mathbf{Fa_i}$. Ces charges axiales induites vont surcharger un roulement et décharger l'autre.
Les constructeurs indiquent dans leurs catalogues une méthode de calcul uniquement valable pour des montages sans jeu et sans précharge. Cette méthode est développée par les organigrammes suivants.

D'un point de vue d'équilibre quasi-statique, en ramenant l'ensemble dans le plan, nous disposons de 3 équations pour 4 inconnues. Cela revient à dire que nous sommes en présence d'un système hyperstatique d'ordre 1. Pour le résoudre, nous aurions besoin d'une équation de déformation. Nous obtenons donc le système suivant :

$$\vec{Kr} + \vec{Ka} = \vec{Fr}_A + \vec{Fr}_B + \vec{Fa}_A + \vec{Fa}_B$$

Equation de la résultante :

$Ka = Fa_A + Fa_B$ $\quad\quad$ $Kr = Fr_A + Fr_B$

Equation de moment/0

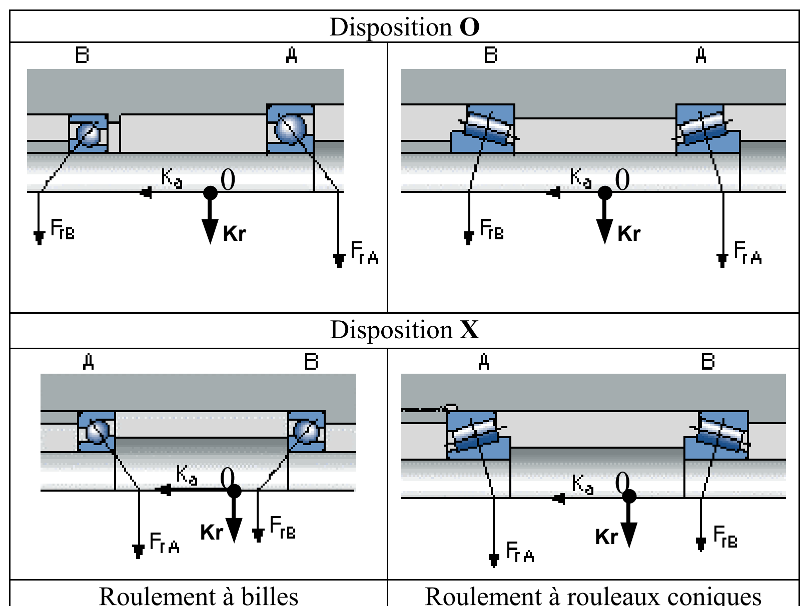
$Fr_A.0A = Fr_B.B0$

➢ **Montage indirect ou montage en O**

C'est la solution à adopter lorsque la rigidité de l'ensemble de la liaison est recherchée ; on est dans le cas du plus grand écart effectif entre roulements. Le réglage est réalisé sur les bagues intérieures.
La dilatation de l'arbre a tendance à diminuer les charges sur les roulements et à augmenter le jeu interne de la liaison, et inversement s'il y a dilatation du logement.

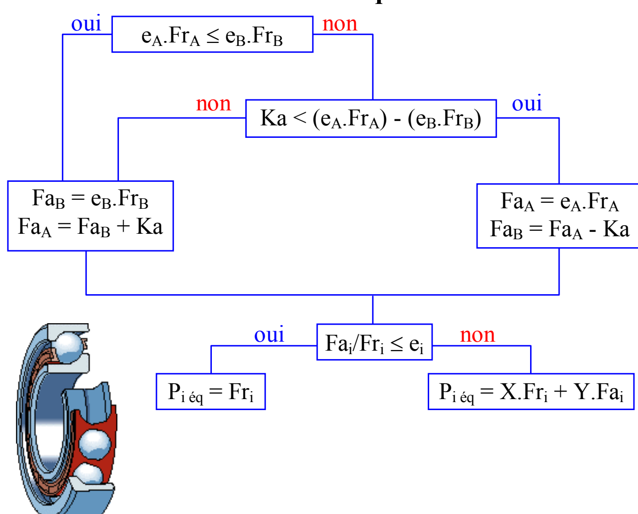
➢ **Montage en X ou montage direct**

Ce montage amène les solutions les plus simples et les plus économiques : moins de pièces adjacentes et moins d'usinages.
Le réglage du jeu interne de la liaison est effectué sur les bagues extérieures. Les dilatations de l'arbre ont tendance à charger un peu plus les roulements et à diminuer le jeu interne.

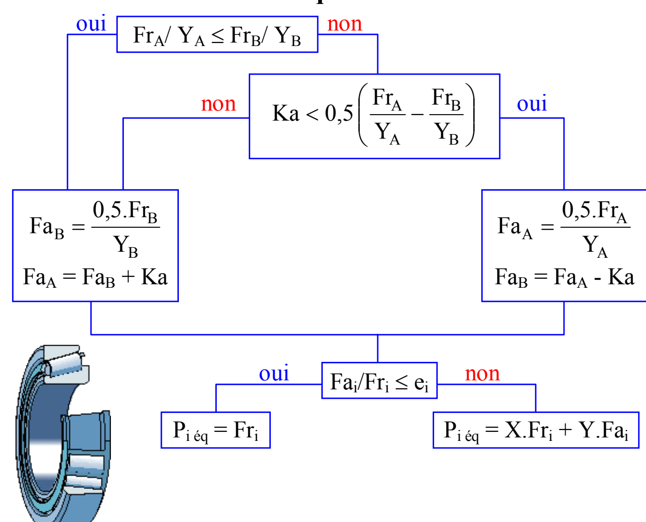


Nous appellerons **A** le roulement qui supporte la charge axiale appliquée au montage (Charges induites exclues). Les organigrammes suivants synthétisent les différentes combinaisons de calcul.

Roulement à billes à contact oblique



Roulement à rouleaux coniques



5.2. Calcul statique

5.2.1. Charge statique de base C_0

La charge statique de base $\mathbf{C_0}$ est utilisée pour le calcul de roulements, soit à l'arrêt, soit en rotation à basse vitesse ou animés de faibles mouvements d'oscillation. Elle doit aussi être prise en considération lorsque des chocs importants de courte durée s'exercent sur un roulement en rotation.

La charge statique de base est définie conformément à ISO 76-1987 comme la charge statique qui correspond par calcul à une contrainte, au centre du contact élément/chemin le plus chargé, égale à :

- 4 600 MPa pour les roulements à rotule sur billes,
- 4 200 MPa pour tous les autres roulements à billes,
- 4 000 MPa pour tous les roulements à rouleaux.

Cette contrainte produit une déformation permanente totale (élément et chemin) d'environ 0,0001 du diamètre de l'élément roulant, les conditions d'application étant celles déjà définies pour la charge dynamique de base.

5.2.2. Charge statique équivalente

Lorsque la charge agissant sur un roulement ne correspond pas aux conditions définies pour la charge statique de base $\mathbf{P_0}$, il est nécessaire de calculer une charge statique équivalente, charge fictive provoquant les mêmes déformations permanentes que la charge réelle. On l'obtient à l'aide de la formule générale :

$$P_0 = X_0 Fr + Y_0 Fa$$

Pour le calcul de $\mathbf{P_0}$, il faut retenir la charge maximale qui puisse se produire et introduire ses composantes radiale et axiale. Si une charge statique agit sur un roulement dans différentes directions, l'intensité de ces composantes variera. Dans de tels cas, il convient d'utiliser les composantes de la charge donnant la plus grande valeur de charge statique équivalente.

5.3. Coefficient de sécurité statique

La formule suivante donne la charge statique de base $\mathbf{C_0}$ nécessaire :

$$C_0 = s_0 P_0$$

C_0 : charge statique de base, N
P_0 : charge statique équivalente, N
s_0 : coefficient de sécurité statique

Des valeurs de principe basées sur l'expérience sont données dans le **Tableau 7** pour le coefficient de sécurité statique s_0 en ce qui concerne les roulements à billes ou à rouleaux, dans différents modes de fonctionnement et avec différentes exigences touchant la régularité de rotation.

Aux températures élevées la capacité de charge statique des roulements est réduite ; des informations complémentaires peuvent être fournies sur demande.

5.4. Contrôle de la capacité de charge statique

Pour les roulements soumis à des charges dynamiques, qui ont été choisis en se référant à la durée, il est opportun, lorsque la charge statique équivalente est connue, de vérifier que la capacité de charge statique est adéquate. On utilise la relation :

$$s_0 = \frac{C_0}{P_0}$$

Si la valeur $\mathbf{s_0}$ obtenue est inférieure à la valeur de principe recommandée (voir **Tableau 7**), il faudra choisir un roulement ayant une charge statique de base plus élevée. Pour les butées à rotule sur rouleaux il est recommandé d'utiliser $s_0 \geq 4$.

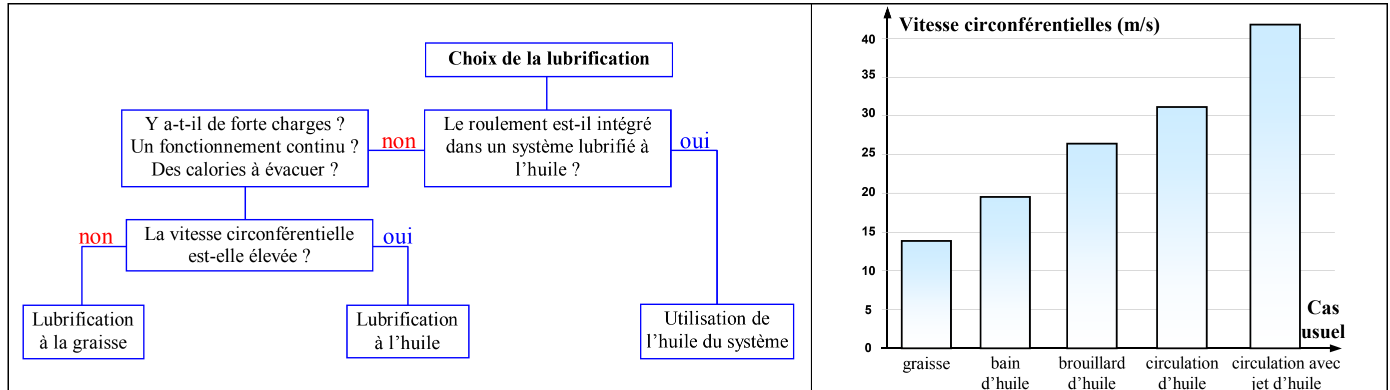
Mode de fonctionnement	**Roulements en rotation** Exigences de silence de fonctionnement						**Roulements à l'arrêt**	
	Faibles		Normales		élevées			
	Rlt billes	Rlt à rouleaux	Rlt billes	Rlt à rouleaux	Rlt billes	Rlt à rouleaux	Rlt billes	Rlt à rouleaux
Régulier sans vibrations	0,5	1	1	1,5	2	3	0,4	0,8
Normal	0,5	1	1	1,5	2	3,5	0,5	1
Chocs Prononcés[1)]	≥ 1,5	≥ 2,5	≥ 1,5	≥ 3	≥ 2	≥ 4	≥ 1	≥ 2

1) Lorsque l'intensité de la charge n'est pas connue, utiliser des valeurs de $\mathbf{s_0}$ au moins aussi élevées que celles indiquées ci-dessus. Si l'intensité des chocs est connue de façon précise, des valeurs de $\mathbf{s_0}$ plus faibles peuvent être appliquées.

Tableau 7 : Valeur de principe pour le coefficient de sécurité statique s_0

6. LUBRIFICATION DES ROULEMENTS (*lubrication*)

La lubrification facilite les mouvements, diminue les frottements internes et protège contre la corrosion.
La plupart des montages de roulements, environ 90 %, sont lubrifiés à la graisse. C'est la solution à envisager en premier, du fait de la simplicité de conception et de la facilité de mise en oeuvre. De plus elle permet le graissage à vie.
L'organigramme suivant permet une première approche dans le choix d'un mode de lubrification.



Organigramme pour le choix du mode de lubrification.

Roulements à rouleaux coniques : vitesses indicatives selon la lubrification.

6.1. Lubrification à la graisse

Elle protège le roulement contre la corrosion, y compris à l'arrêt ; assure une certaine étanchéité en s'opposant à l'entrée des impuretés ; convient à une large gamme de vitesses ; permet un démarrage doux ; s'utilise en faible quantité et offre un fonctionnement sans entretien pendant de longues périodes.

6.2. Lubrification à l'huile

Elle est utilisée dans les cas suivants : vitesses très élevées, paliers très chargés, températures élevées nécessitant une évacuation des calories, machine déjà lubrifiée à l'huile.

Remarques : plus les vitesses sont élevées, plus la viscosité doit être faible. Une viscosité trop faible peut entraîner la rupture du film d'huile suivi d'un grippage. Une viscosité trop élevée amène une élévation de la température de fonctionnement des paliers.
Un excès d'huile peut être plus néfaste qu'une insuffisance car il crée un brassage provoquant un échauffement anormal des paliers.

a) **Lubrification par bain d'huile :** ce dispositif est le plus simple ; l'huile doit atteindre l'élément roulant le plus bas et ne pas le dépasser pour éviter le brassage.

b) **Lubrification par bain et ruissellement :** si les projections et le ruissellement sont suffisants, l'huile projetée sur les parois par effet centrifuge peut être recueillie (goulottes, larmiers, etc.) puis canalisée vers les roulements à lubrifier.

c) **Lubrification par brouillard d'huile :** elle est surtout utilisée aux hautes vitesses.

d) **Lubrification par circulation d'huile :** l'huile circule en permanence et arrive près des roulements grâce à une pompe et des canalisations.
Lorsque les roulements sont très chargés, les vitesses très élevées, l'huile peut être injectée sous pression par un ou deux becs. Le jet est dirigé vers les éléments roulants juste entre la bague intérieure et la cage.
Certains roulements non symétriques, rouleaux coniques et contacts obliques, créent un phénomène de pompage centrifuge entraînant une circulation de l'huile.

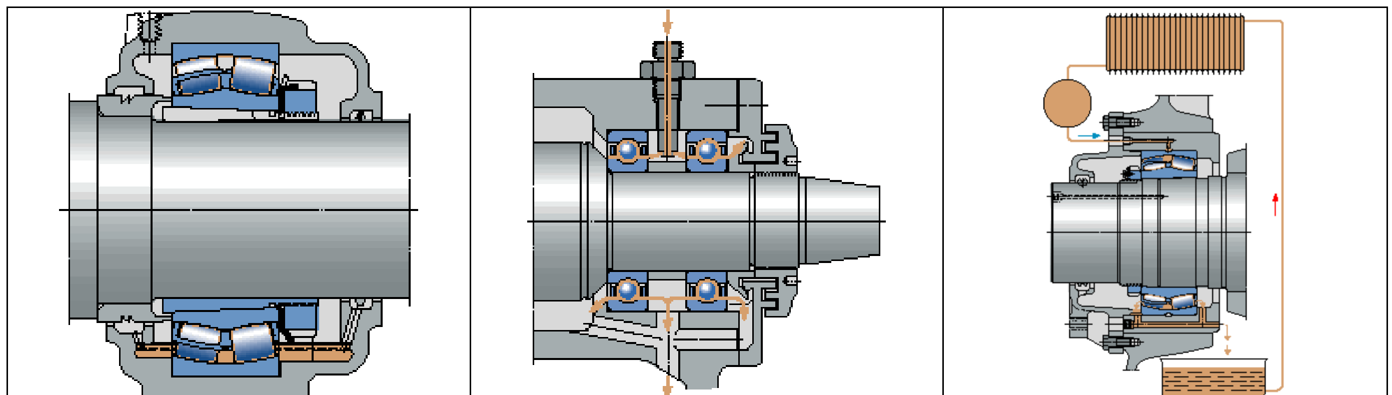


Figure 14 : Exemples de lubrification

C. EXERCICES DUREE DE VIE ET FIABILITÉ

1. EXERCICE FIABILITE 1

Un ensemble comporte 3 roulements tournant à 1500 t/mn.

- 2 roulements à billes : $C_1 = 21600$ N $P_1 = 1800$ N.
  $C_2 = 15000$ N $P_2 = 1000$ N.
- 1 roulement à rouleaux : $C_3 = 27000$ N $P_3 = 2000$ N.

Q_1 : Déterminer la fiabilité de l'ensemble au bout de 10 000 heures.
Q_2 : Quelle est la durée de vie correspondant à une fiabilité de 0,98 ?

Réponse Q_1

Tableau de synthèse :

	Roulement 1	**Roulement 2**	**Roulement 3**
$L_{10\,i}$ (Mtr)			
$L_{10h\,i}$ (h)			
$L / L_{10h\,i}$			
F_i			

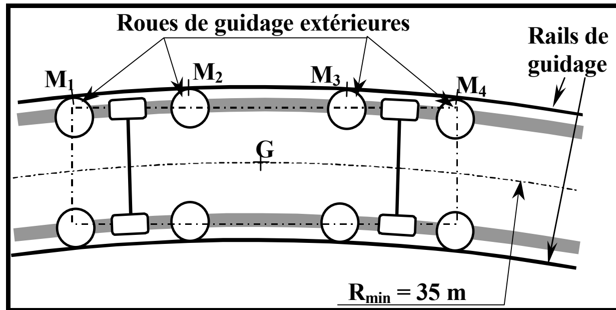
F	

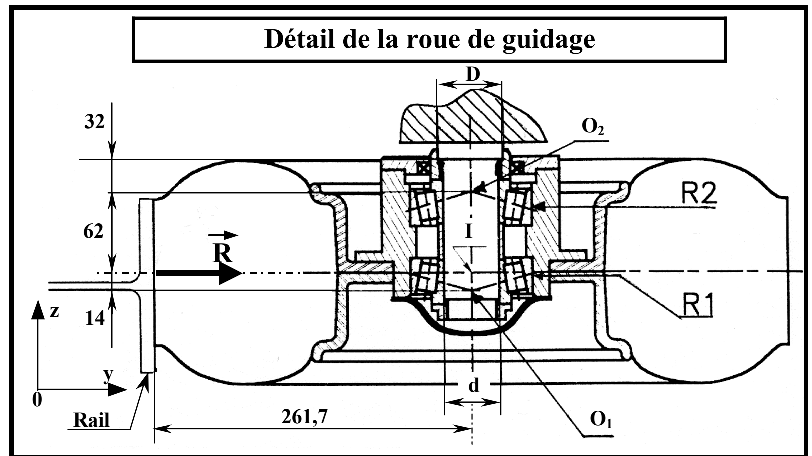
Réponse Q_2

2. EXERCICE FIABILITE 2

On souhaite une fiabilité f = 0,95 au bout de 12 000 heures pour un ensemble comportant 4 roulements.
Q_1 : Quelle durée de vie nominale faut-il obtenir en moyenne pour chaque roulement ?
Q_2 : Les 3 premiers roulements déterminés ayant des fiabilités respectives f_i = 0,99 , 0,995 et 0,97 , quelle doit être la durée de vie minimale du quatrième ?

3. EXERCICE 3 (METRO VAL)





Le VAL (MATRA Transport) est un système automatisé de transport urbain de personnes sans conducteur. Le guidage latéral est réalisé par des roues équipées de pneumatiques. L'étude concerne la vérification de durée de vie de l'une des roues composant le guidage latéral.

Sur un trajet type, on estime qu'il y a 60 % de ligne droite, 20 % de virage à gauche et 20 % de virage à droite. Sur le roulement le plus chargé $\mathbf{R_1}$, la charge radiale équivalente en ligne droite $\mathbf{P_1}$ = 2040 N et en virage $\mathbf{P_2}$ = 4900 N (roulement SKF 32309B 45 x 100 x 38,25 **C** = 128000 N). Les roues de guidage situées à l'intérieur du virage ne supportent aucun effort radial.

Q1 : Calculer la charge équivalente $\mathbf{P_e}$ (charge constante qui donnerait la même durée de vie que celle obtenue avec le chargement réel).

Q2 : Calculer la durée de vie $\mathbf{L_{10}}$ en millions de tours pour une fiabilité de 90 %.

Q3 : Sachant que pour un véhicule de transport urbain la durée de vie estimée est de 1,5 millions de kilomètres parcourus, en déduire la fiabilité espérée du montage. Que peut-on en conclure ?

REPONSE Q_1

Calcul de la charge équivalente moyenne : Pe

REPONSE Q_2

Durée de vie L_{10}

REPONSE Q_3

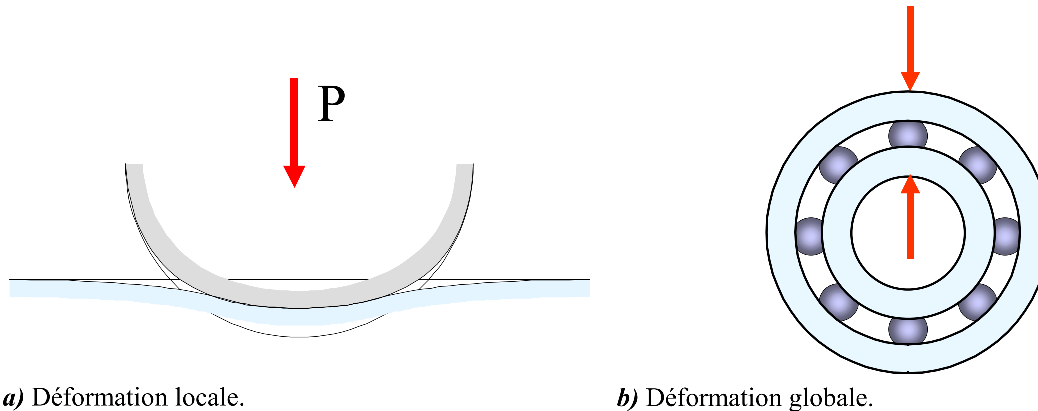
PRECONTRAINTE DES ROULEMENTS A CONTACT OBLIQUE

PRELOAD OF ANGULAR BEARINGS

A. ETUDE DES DEFORMATIONS DANS UN ROULEMENT

Les déformations dans les roulements peuvent être très complexes. On peut cependant dégager deux types de déformations :

- la première est une déformation locale apparaissant à l'interface de l'élément roulant et du chemin de roulement (**Figure 1a**).
- La seconde est une déformation d'ensemble des deux bagues sous l'effet des contraintes internes. Elle est la somme des déformations des bagues (**Figure 1b**).



a) Déformation locale. ***b)*** Déformation globale.

Figure 1 : Deux modes de déformations.

Contrairement à la relation effort-déformation locale, la relation effort-déformation globale n'est pas intrinsèque au roulement (On ne peut pas les calculer indépendamment du reste du mécanisme). En effet les ajustements, mais aussi les propriétés et la forme des pièces supportant le roulement influencent cette déformation.

Par la suite, nous ferons l'hypothèse de rigidité des bagues pour tous les modèles de calcul. Cette hypothèse s'avère utile pour développer un modèle de déformation intrinsèque. Dans la plupart des cas, elle est une bonne approximation de la déformation globale.

1. HYPOTHESES.

Pour effectuer ces calculs, on effectue des hypothèses que l'on peut regrouper en trois catégories.

1. les premières hypothèses sont d'ordre général :
   a. Les bagues sont indéformables.
   b. Les forces d'inertie sont négligées.
   c. Pas de jeu dans les roulements .

2. La seconde est l'hypothèse des petites déformations. Dans ce cas l'hypothèse des petites déformations concerne le contact élément roulant-bague. Elle permet d'utiliser le modèle de comportement du contact basé sur le modèle de Hertz. L'hypothèse des petites déformations implique, dans certaines conditions, l'hypothèse de l'angle de contact constant.

3. Quant à la dernière, c'est l'hypothèse des petits déplacements. Cette hypothèse permet d'égaler le repère lié à la bague intérieure avec le repère lié à la bague extérieure. Les efforts s'exprimeront de la même façon dans l'un ou l'autre repère.

2. NATURE DES CONTACTS.

Le calcul des roulements est basé sur la théorie de Hertz qui permet de calculer les pressions de contact, et les déformations des corps en présence. Nous avons vu que les roulements utilisent, d'une part le contact ponctuel, d'autre part le contact linéique.

$$Q_i = K \cdot \delta_i^m$$

δ_i : Déformation locale (rapprochement des deux corps).
K : Coefficients fonction des matériaux et des rayons de courbure.
Q_i : Charge sur l'élément roulant i.

Billes: m = 3/2 (*balls*)

Rouleaux : m = 10/9 (*rollers*)

Dans la pratique, plusieurs études ont débouché vers une formulation plus précise du coefficient K. Des valeurs pratiques de ce coefficient sont détaillées un peu plus loin.

3. ROULEMENT A CONTACT OBLIQUE.

Le roulement a un jeu interne nul. Tous les éléments roulants sont en contact avec les chemins de roulement sous un effort de précharge nul. Les actions de contact éléments roulants/chemins de roulement sont portées par les normales au plan tangent à l'élément de contact.

A partir de la **Figure 2**, nous allons déterminer les charges supportées par les différents éléments roulants du roulement à contact oblique, l'angle de contact étant désigné par α, lorsque le roulement supporte une charge $\vec{F}$.

Naturellement, il va se produire des déformations élastiques dans le roulement au niveau de ses éléments roulants. La bague intérieure BI (*inner ring*) va se déplacer parallèlement à elle-même, dans une direction autre que celle de $\vec{F}$.
$\vec{\delta}$ caractérise cette translation. La bague extérieure BE (*outer ring*) est supposée fixe.

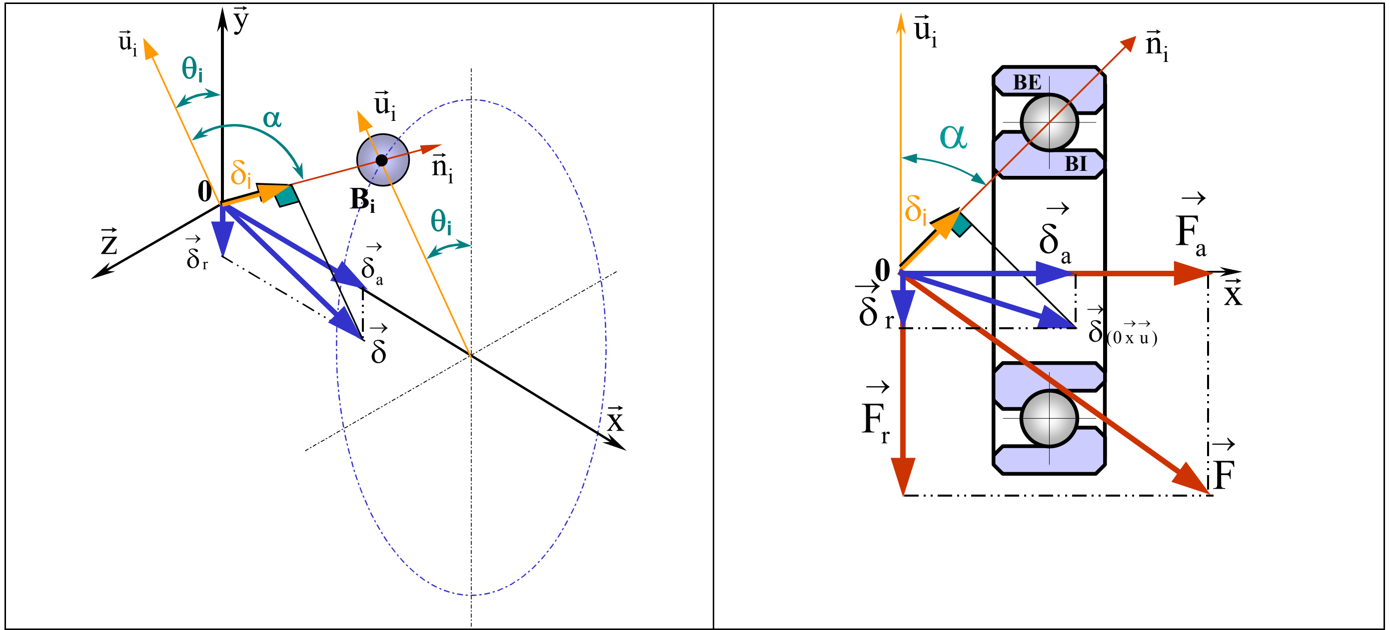


Figure 2 : Déplacement au centre de poussée d'un roulement à billes à contact oblique

Nous supposons que :

- $\vec{\delta}$ et $\vec{F}$ appartiennent à un plan contenant l'axe du roulement.
- Le centre d'une bille, ou l'axe d'un rouleau se trouve dans ce même plan.

La déformation δ_i au niveau de l'élément roulant **i** tient compte des déformations au contact bague int./élt roulant et élt roulant/bague ext.
Déterminons cette déformation δ_i en fonction de la translation de la bague intérieure à partir de la projection de $\vec{\delta}$ sur la direction de $\vec{Q}_i$. Le roulement défini par la **Figure 2** est soumis à un déplacement relatif des deux bagues $\vec{\delta}$ au centre de poussée **0**. Ce déplacement se décompose de la façon suivante :

$$\vec{\delta} = \delta_a \vec{x} + \delta_r \vec{y}$$

Nous allons étudier les déplacements au niveau de la $i^{ème}$ bille orientée par l'angle θ_i défini sur la **Figure 2**.
Avec l'hypothèse des petites déformations, l'interpénétration cumulée des deux bagues dans la $i^{ème}$ bille, que nous appellerons désormais enfoncement correspond à :

$$\delta_i = \vec{\delta}.\vec{n}_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{n}_i = \sin\alpha\,\vec{x} + \cos\alpha.\cos\theta_i\,\vec{y} + \cos\alpha.\sin\theta_i\,\vec{z}$$

soit :

$$\delta_i = \delta_a \sin\alpha + \delta_r \cos\alpha.\cos\theta_i$$

pour la position particulière de $\theta_i = 0$, nous obtenons l'enfoncement maximal, soit :

$$\delta_{Max} = \delta_a \sin\alpha + \delta_r \cos\alpha$$

On introduit le paramètre adimensionnel ε, appelé paramètre de charge et défini par l'équation suivante[1] :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\delta_a \tan\alpha}{\delta_r}\right)$$

La relation effort-déplacement au niveau du contact élément roulant-bague utilise la théorie de Hertz, soit :

$$Q_i = K.\delta_i^m$$

L'expression de la charge de l'élément roulant vaut :

$$Q_i = K.\left(\delta_r \cos\alpha.(\cos\theta_i + 2\varepsilon - 1)\right)^m$$

L'effort maximal est alors obtenu pour la position $\theta_i = 0$ et peut s'écrire des deux façons suivantes :

$$Q_{Max} = K.\left(2\varepsilon.\delta_r.\cos\alpha\right)^m \quad \text{ou} \quad Q_{Max} = K.\left(\frac{2\varepsilon.\delta_a.\sin\alpha}{(2\varepsilon - 1)}\right)^m$$

Des expressions précédentes on déduit une nouvelle expression de la charge appliquée sur l'élément roulant i :

$$Q_i = Q_{Max}\left(\frac{\cos\theta_i + 2\varepsilon - 1}{2\varepsilon}\right)^m$$

A partir de l'équilibre de la bague intérieure, les efforts sur le roulement s'écrivent alors :

$$\begin{cases} F_a = \sum_{-\theta_0}^{\theta_0} Q_i.\sin\alpha \\ F_r = \sum_{-\theta_0}^{\theta_0} Q_i.\cos\alpha.\cos\theta_i \end{cases}$$

Le passage du domaine discret au domaine continue est réalisé par l'application du théorème de la moyenne. Cela suppose que cette relation est suffisamment précise sans passage à la limite :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\right] = \frac{n}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

L'utilisation de cette approximation, présente l'avantage de moyenner les déplacements. En effet, le déplacement du roulement dépend de la position des éléments roulants relativement à l'effort. La somme continue revient à moyenner les déplacements, ils sont donc finalement plus précis que ceux issus de la somme discrète, dans la mesure où l'on se contente d'une valeur de déplacement unique. Dans notre cas n = Z et correspond aux nombres d'éléments roulants.

Soit en application de la formule de la moyenne les efforts deviennent :

$$\begin{cases} F_a = \dfrac{Z.Q_{Max}.\sin\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\theta + 2\varepsilon - 1}{2\varepsilon}\right)^m d\theta \\ F_r = \dfrac{Z.Q_{Max}.\cos\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\frac{\cos\theta + 2\varepsilon - 1}{2\varepsilon}\right)^m d\theta \end{cases}$$

On introduit deux fonctions du paramètre de charge de la façon suivante :

$$\begin{cases} J_a(\varepsilon) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\theta + 2\varepsilon - 1}{2\varepsilon}\right)^m d\theta \\ J_r(\varepsilon) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\frac{\cos\theta + 2\varepsilon - 1}{2\varepsilon}\right)^m d\theta \end{cases}$$

Alors l'expression des efforts s'écrit :

$$\begin{cases} F_a = Z.Q_{Max}.\sin\alpha.J_a(\varepsilon) \\ F_r = Z.Q_{Max}.\cos\alpha.J_r(\varepsilon) \end{cases}$$

[1] Certains auteurs préfèrent utiliser le paramètre adimensionnel « a » défini par : $a = \dfrac{\delta_a \tan\alpha}{\delta_r}$

Les **tableaux 1** et **2** rassemblent les valeurs des coefficients $J_a(\varepsilon)$ et $J_r(\varepsilon)$ en fonction du paramètre adimensionnel ε. Ces tableaux distinguent le type de contact (ponctuel ou linéique) et les valeurs sont obtenues par une résolution numérique des expressions de $J_a(\varepsilon)$ et de $J_r(\varepsilon)$.

rlt billes m = 3/2 (*angular ball bearing*)			
ε	$F_r.Tan\alpha/F_a = Jr(\varepsilon)/Ja(\varepsilon)$	$J_r(\varepsilon)$	$J_a(\varepsilon)$
0,00	1	1/Z	1/Z
0,10	0,9663	0,1156	0,1196
0,20	0,9318	0,159	0,1707
0,30	0,8964	0,1892	0,211
0,40	0,8601	0,2117	0,2462
0,50	0,8225	0,2288	0,2782
0,60	0,7835	0,2416	0,3084
0,70	0,7427	0,2505	0,3374
0,80	0,6995	0,2559	0,3658
0,90	0,6529	0,2576	0,3945
1,00	0,6	0,2546	0,4244
1,25	0,4338	0,2289	0,5044
1,67	0,3088	0,1871	0,606
2,50	0,185	0,1339	0,724
5,00	0,0831	0,0711	0,8558
∞	0	0	1

Tableau 1 : valeurs des fonctions $J_a(\varepsilon)$ et $J_r(\varepsilon)$ pour un contact ponctuel

rlt conique m = 10/9 (*tapered roller bearing*)			
ε	$F_r.Tan\alpha/F_a = Jr(\varepsilon)/Ja(\varepsilon)$	$J_r(\varepsilon)$	$J_a(\varepsilon)$
0,00	1	1/Z	1/Z
0,10	0,9613	0,1268	0,1319
0,20	0,9215	0,1737	0,1885
0,30	0,8805	0,2055	0,2334
0,40	0,838	0,2286	0,2728
0,50	0,7939	0,2453	0,309
0,60	0,748	0,2568	0,3433
0,70	0,6999	0,2636	0,3766
0,80	0,6486	0,2658	0,4098
0,90	0,592	0,2628	0,4439
1,00	0,5238	0,2523	0,4817
1,25	0,3598	0,2078	0,5775
1,67	0,234	0,1589	0,679
2,50	0,1372	0,1075	0,7837
5,00	0,0611	0,0544	0,8909
∞	0	0	1

Tableau 2 : valeurs des fonctions $J_a(\varepsilon)$ et $J_r(\varepsilon)$ pour un contact linéique

Suivant les valeurs du paramètre de charge ε, la répartition des efforts se fait sur une partie des éléments roulants, ou au contraire sur tous les éléments roulants. La **Figure 3** nous montre ces différents cas de chargement.
La valeur caractéristique ε = 0,5 correspond à un chargement sur une moitié des éléments roulants, le déplacement est alors purement radial. Le chargement sur toutes les billes est obtenu pour ε ≥ 1.

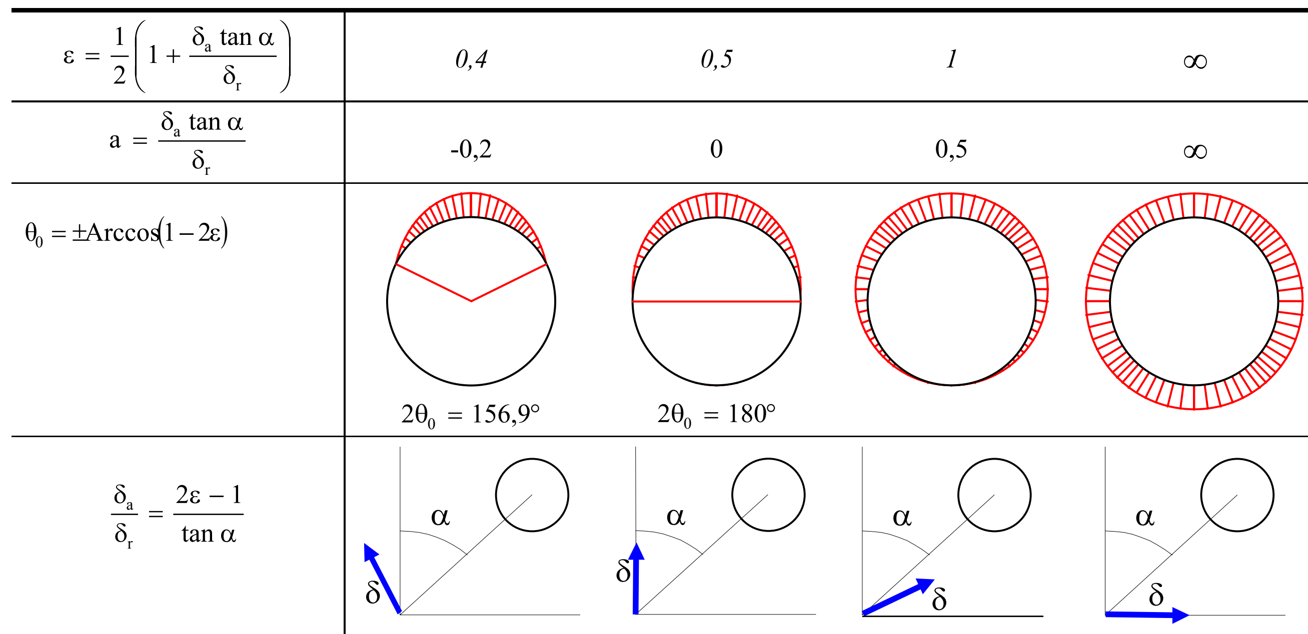


Figure 3 : Différentes configurations de chargement d'un roulement

Les différents cas présentés dans le **Tableau 3** montrent l'évolution de la répartition de la charge au sein d'un roulement. Pour un effort axial **Fa** (*Thrust load*) constant, l'augmentation de la charge radiale **Fr** (*radial load*) diminue la distribution des efforts intrinsèques $\mathbf{Q_i}$ et défavorise la rigidité du roulement.

Cas 1 : avec un effort radial **Fr** modéré par rapport à **Fa**, on constate que la distribution des efforts, toujours sur 360°, n'est plus uniforme. Il existe un enfoncement δ_a et les deux bagues s'excentrent de δ_r.

Cas 2 : l'augmentation de l'effort **Fr** tend à augmenter l'excentration δ_r tandis que le jeu négatif ou l'enfoncement δ_a tend à devenir nul. Certains éléments roulants ne sont plus chargés.

Cas 3 : une nouvelle augmentation de **Fr** abouti au cas spécifique ou δ_a est nul. On dit que le ***roulement fonctionne sans jeu*** alors que certains éléments roulants ne portent plus sur leur chemin. La zone de chargement s'étend alors sur 180°.Cette situation est celle utilisée pour le calcul de la charge équivalente conventionnelle préconisé par les constructeurs et la norme ISO. Ce cas correspond au seuil minimal pour un fonctionnement correct d'un roulement à contact oblique.

Cas 4 : le chargement devient à prédominance radiale. Une nouvelle augmentation de **Fr** entraîne l'apparition d'un jeu positif (*clearance*) avec une zone de charge nettement inférieure à 180° ce qui est à proscrire.

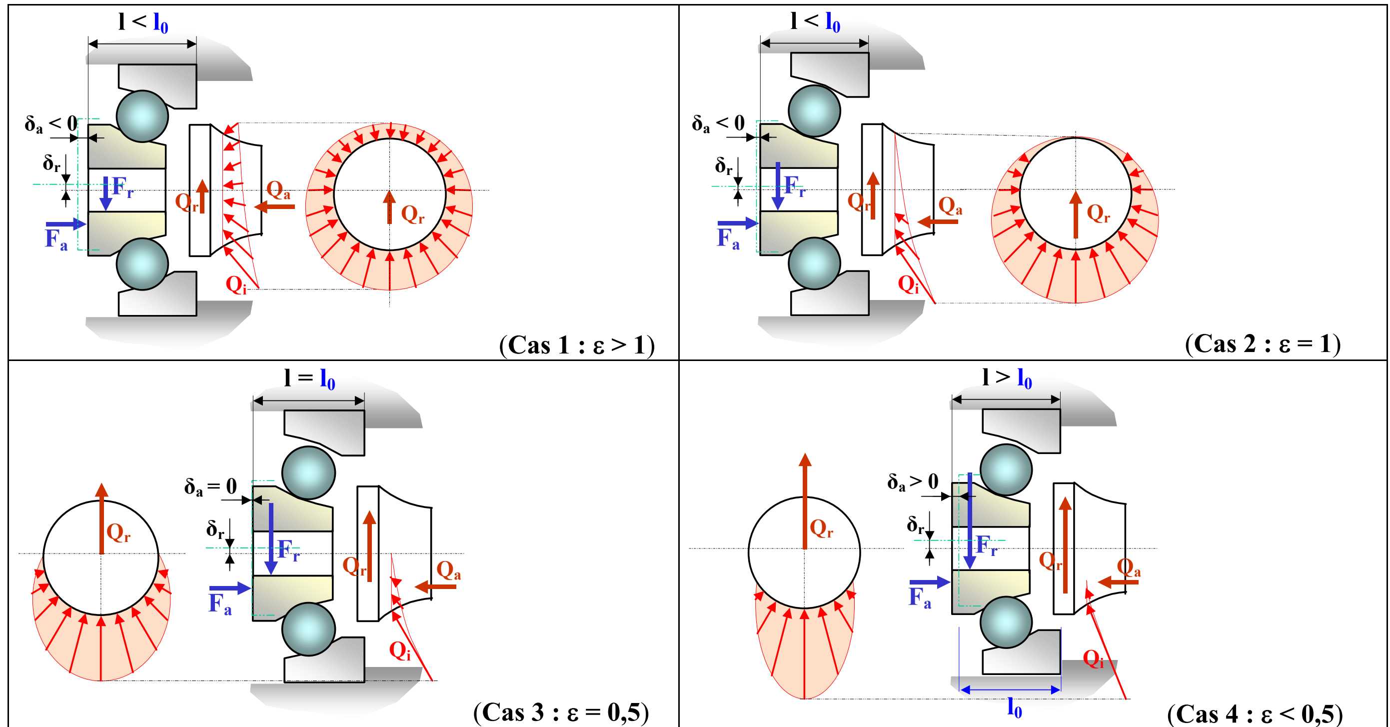


Tableau 3 : Evolution du comportement en fonction d'un chargement radial variable

4. FORCES INDUITES ET DUREE DE VIE (FIGURE 4)

Toute charge radiale **Fr** entraîne l'existence d'une charge axiale **Qa** dite « charge induite ».

Pour un jeu négatif ou nul, la zone de s'étend normalement au voisinage de 180°. Dans ce cas :

Fa = Fr/2Y

Avec Y : facteur de charge axial

En préchargeant le montage par un effort axial **Fa**, on diminue le jeu de fonctionnement du roulement ce qui améliore la durée de vie mais dans une certaine limite.

On constate une durée de vie plus courte pour un montage avec jeu ($\varepsilon < 0,5$), comparée au fonctionnement sans jeu ($\varepsilon = 0,5$). En effet, les efforts ne sont pas transmis par tous les éléments roulants.

Mais une précharge trop forte ($\varepsilon > 1$) a pour effet de réduire rapidement la durée de vie.

Une précharge légère (proche de $\varepsilon \approx 1$), conduit à la durée de vie maximale.

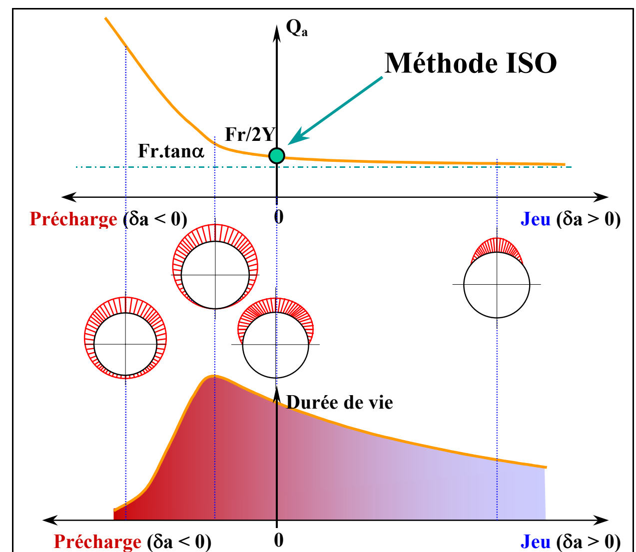


Figure 4 : Influence de la précontrainte sur la durée de vie d'un roulement à contact oblique

5. DETERMINATION DU COEFFICIENT K

La connaissance de ce type de relation : $Q_i = K \cdot \delta_i^m$, qui modélise le comportement local permet d'étudier le comportement global du roulement. Cependant, la difficulté réside à déterminer correctement l'expression du coefficient **K** (qui matérialise la raideur du roulement).

Plusieurs approches peuvent être abordées pour calculer **K**. elles sont basées sur des études expérimentales puis extrapolées à des formulations analytiques intégrant les paramètres géométriques internes du roulement (Dw, Z, l, α_0, …). Nous présentons les méthodes de calcul de **K** les plus intéressantes.

5.1. K* par la théorie de hertz

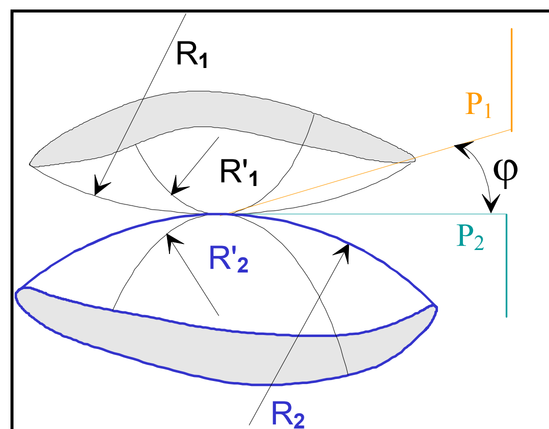
Les roulements à billes à contact oblique et les roulements rigides à billes peuvent se définir à partir d'une même géométrie de contact, seules diffèrent les limites des zones de contact.

Ces caractéristiques géométriques définissent la forme des contacts ; comme le comportement élastique aux contacts est fonction de la géométrie et des caractéristiques des matériaux (coefficient de Poisson, module d'élasticité longitudinale), ces choix dimensionnels propres à chaque constructeur constituent un savoir-faire.

Une résolution par la théorie de HERTZ du problème des contacts ponctuels à courbures définies entre deux matériaux élastiques et l'intégration des équations de l'élasticité, en tenant compte des déformations observées, conduit au résultat suivant pour un contact acier sur acier.

$$\delta = 2{,}97.10^{-4}\delta^{*}\sqrt[3]{Q^2(\Sigma\rho)}$$

δ : rapprochement, en mm, des deux éléments en contact mesuré suivant la normale au contact ;
δ* : caractéristique de la géométrie des contacts, définie en fonction de la différence des courbures F(ρ) (voir **Tableau 4**) ;
Q : charge en newton, appliquée à la bille ;
Σ(ρ) : somme des courbures en mm^{-1}.



Avec :

$$\sum\rho = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}$$

et

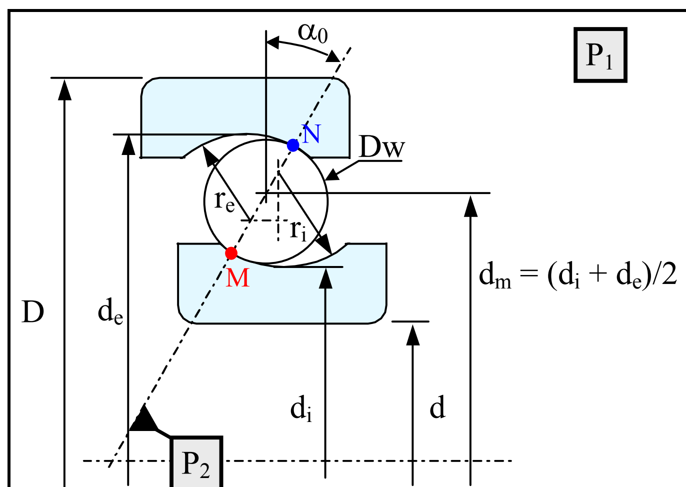
$$F(\rho) = \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)}{\sum\rho}$$

Dans le cas de corps hémisphériques l'angle φ = 90°

Exemple : Application au roulement à billes à contact oblique SKF n° 7203BE

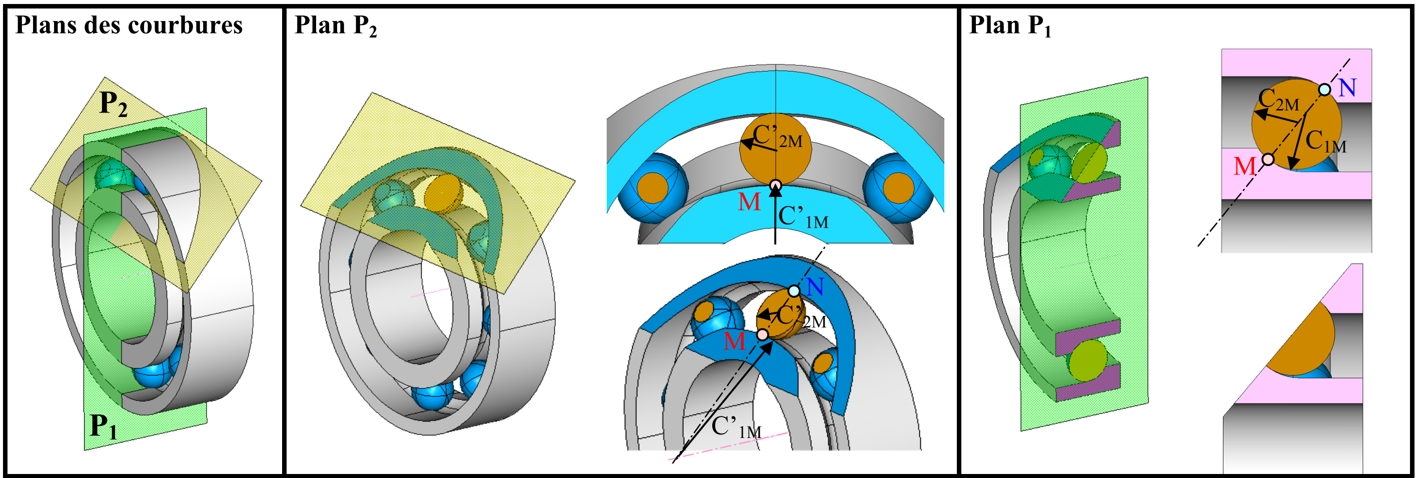
d = 17 mm	D = 40 mm	B = 12 mm	C = 11 100 N	C_0 = 6100 N	α_0 = 40° (B)
d_m = 29,75 mm	Dw = 7,938 mm	$f_i = r_i/Dw$ = 0,52	$f_e = r_e/Dw$ = 0,53	Z = 10	

L'expression des déformations doit être calculée au niveau du contact intérieur(en M) et du contact extérieur (en N).



F(ρ)	δ*	F(ρ)	δ*
0	1	0,9729	0,4960
0,1075	0,9974	0,9838	0,4352
0,3204	0,9761	0,9909	0,3745
0,4795	0,9429	0,9951	0,3176
0,5916	0,9077	0,9973	0,2705
0,6716	0,8733	0,9982	0,2427
0,7332	0,8394	0,9989	0,2106
0,7948	0,7961	0,9995	0,1717
0,8349	0,7602	0,99985	0,11995
0,8736	0,7169	1	0
0,9099	0,6636		
0,9365	0,6112		
0,9574	0,5551		

Tableau 4 : Différentes valeurs de δ*



Contact intérieur en M (indice i)	Contact extérieur en N (indice e)
$\sum\rho = \left(-\frac{1}{R_1}\right) + \left(+\frac{1}{R_2}\right) + \left(+\frac{1}{R'_1}\right) + \left(+\frac{1}{R'_2}\right)$ $\Sigma\rho_i = \underbrace{\frac{1}{-r_i} + \frac{2}{Dw}}_{P_1} + \underbrace{\frac{1}{\frac{d_m}{2.\cos\alpha_0} - \frac{Dw}{2}} + \frac{2}{Dw}}_{P_2}$ **$\Sigma\rho_i$ = 0,3300 mm^{-1}**	$\sum\rho = \left(-\frac{1}{R_1}\right) + \left(+\frac{1}{R_2}\right) + \left(-\frac{1}{R'_1}\right) + \left(+\frac{1}{R'_2}\right)$ $\Sigma\rho_e = \underbrace{\frac{1}{-r_e} + \frac{2}{Dw}}_{P_1} + \underbrace{-\frac{1}{\frac{d_m}{2.\cos\alpha_0} + \frac{Dw}{2}} + \frac{2}{Dw}}_{P_2}$ **$\Sigma\rho_e$ = 0,2219 mm^{-1}**
$F(\rho_i) = \dfrac{\left(\frac{1}{-r_i} - \frac{1}{\frac{d_m}{2.\cos\alpha_0} - \frac{Dw}{2}}\right) + \left(\frac{2}{Dw} - \frac{2}{Dw}\right)}{\Sigma\rho_i}$ **$F(\rho_i)$ = 0,9413**	$F(\rho_e) = \dfrac{\left(\frac{1}{-r_e} + \frac{1}{\frac{d_m}{2.\cos\alpha_0} + \frac{Dw}{2}}\right) + \left(\frac{2}{Dw} - \frac{2}{Dw}\right)}{\Sigma\rho_e}$ **$F(\rho_e)$ = 0,8715**

A partir des informations du **Tableau 4** et par interpolation linéaire, on détermine pour chaque contact le paramètre δ^* **:**

$\delta_i^* = 0{,}5984$ soit un enfoncement local de $\delta_i = 2{,}97.10^{-4}.\delta_i^*.\sqrt[3]{Q^2(\Sigma\rho_i)}$ $\quad \delta_i = 1{,}2281.10^{-4}.\sqrt[3]{Q^2}$

$\delta_e^* = 0{,}7200$ soit un enfoncement local de $\delta_e = 2{,}97.10^{-4}.\delta_e^*.\sqrt[3]{Q^2(\Sigma\rho_e)}$ $\quad \delta_e = 1{,}2947.10^{-4}.\sqrt[3]{Q^2}$

Expression de la déformation locale au niveau d'un élément roulant

$$\delta_{i_bille} = \delta_i + \delta_e = 2{,}523.10^{-4}.\sqrt[3]{Q^2}$$

On définit le paramètre **K* = 2,523.10^{-4} mm/N$^{2/3}$**. On établit la relation suivante : $K^* = f(K)$.
En considérant que le coefficient de raideur **K** est associé à l'enfoncement global $\boldsymbol{\delta_{i_bille}}$ ($Q = K.\delta^m_{i_bille}$), l'expression de **K** vaut :

$$K = \left(\frac{1}{\frac{1}{K_i^{1/m}} + \frac{1}{K_e^{1/m}}}\right)^m \text{ soit la relation reliant les deux coefficients : } K^* = \frac{1}{K^{1/m}}$$

L'expression de **K*** correspond à un coefficient de souplesse soit : $K^* = 1/K_i^{1/m} + 1/K_e^{1/m}$. Les constructeurs de roulement proposent des valeurs pour **K***. L'expression générale de l'enfoncement (δ) d'un élément roulant en fonction de **K*** vaut :

$$\delta = K^*.Q^{1/m}$$

5.2. K* par les valeurs usuelles constructeurs

Le **Tableau 5** donne des valeurs usuelles employées par différents constructeurs ou proposées dans la littérature spécialisée. Les dimensions sont en mm et l'effort en N.

	SKF	TIMKEN	INA	autres
Billes (m = 3/2)	$\delta = \frac{4{,}5.10^{-4}}{\sqrt[3]{D_W}}.Q^{2/3}$		$\delta = \frac{4{,}84.10^{-4}}{\sqrt[3]{D_W}}.Q^{2/3}$	
Rouleaux coniques (m = 10/9)	$\delta = \frac{2{,}14.10^{-5}}{L^{0,5}} \cdot Q^{0,75}$	$\delta = \frac{1{,}45.10^{-4}}{L^{0,9}.D^{0,094}} \cdot Q^{0,909}$		$\delta = \frac{7{,}85.10^{-5}}{L^{0,8}} \cdot Q^{0,9}$
Rouleaux cylindriques (m = 10/9)	$\delta = \frac{7{,}55.10^{-5}}{L^{0,8}} \cdot Q^{0,9}$			$\delta = \frac{7{,}78.10^{-5}}{L^{0,8}} \cdot Q^{0,9}$

Tableau 5 : expressions de l'enfoncement δ

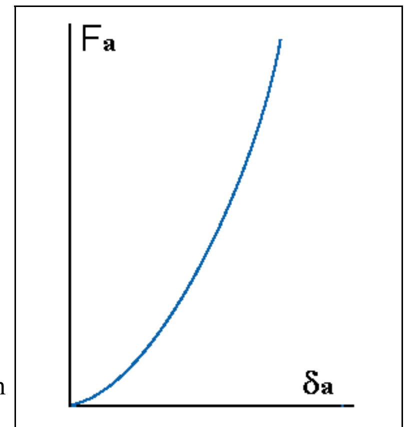
En annexe, on trouvera des caractéristiques géométriques internes pour les principaux roulements à contact oblique. Dans certains cas, si les paramètres sont inconnus, on pourra les évaluer à partir des expressions suivantes :

Diamètre moyen	Diamètre élément roulant	Nombre d'éléments roulants		Coefficient f
$d_m \approx (D + d)/2$	$D_W \approx 0{,}3175 . (D - d)$	$\alpha = 40°$	$Z \approx Ent(\pi.d_m/D_W) - 1$	$f_i \approx 0.52$
		$\alpha = 25°$ et $\alpha = 15°$	$Z \approx Ent(\pi.d_m/D_W) - 2$	$f_e \approx 0.53$

5.3. K* par expérimentation

Il est possible de déterminer le coefficient de souplesse $\mathbf{K^*}$ par un essai statique. L'application d'une charge axiale (**Fa**), sur un roulement est d'une mise en oeuvre assez simple et peut être controlée par un capteur d'effort. La mesure du déplacement axial ($\boldsymbol{\delta_a}$), de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure peut être obtenue par l'intermédiaire d'un palpeur.

En considérant que le déplacement n'est dû qu'aux déformations des contacts éléments roulants sur les chemins de roulements, chaque élément roulant supporte la même charge locale ($\varepsilon \to \infty$), soit :



- Données de calcul après la mesure : **Fa**, $\boldsymbol{\delta_a}$
- Calcul du déplacement maximum : $\delta_{Max} = \delta_a \sin\alpha$
- Calcul de la charge maximum : $Q_{Max} = F_a /(Z . \sin\alpha)$
- Calcul du coefficient de souplesse : $K^* = \delta_{Max} /(Q_{Max})^{1/m}$

ou encore : $K^* = \frac{Z^{1/m}.(\sin\alpha)^{(1+m)/m}.\delta_a}{Fa^{1/m}}$

On remarque un déplacement relativement important sous de faibles charges puis un comportement quasi linéaire pour des charges conséquentes.

B. ETUDE DU COMPORTEMENT DE DEUX ROULEMENTS A CONTACT OBLIQUE

1. REALISATION D'UNE LIAISON PIVOT A L'AIDE DE DEUX ROULEMENTS A CONTACT OBLIQUE

Soit le montage en X (*direct mounting*) de deux roulements à billes à contact oblique conformément à la **Figure 5** et supportant des actions extérieures ramenées au point 0. Note : le montage en O est appelé en anglais *indirect mounting*.

<u>**On isole l'arbre ainsi que les bagues intérieures des roulements**</u>.

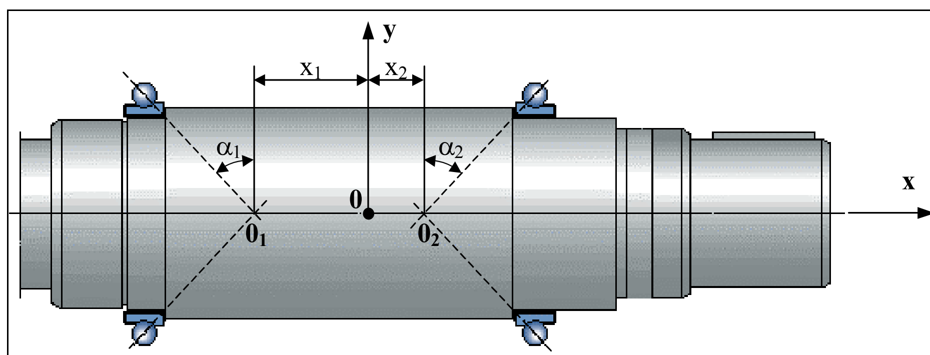


Figure 5 : Liaison PIVOT supportant des actions mécaniques quelconques

1.1. Actions extérieures

Torseur des efforts extérieurs sur l'arbre en 0 : $\{\tau_{E/arbre}\}_0 = \begin{Bmatrix} X_E & L_E \\ Y_E & M_E \\ Z_E & N_E \end{Bmatrix}$

Torseur du roulement 1 sur l'arbre au centre de poussée 0_1 : $\{\tau_{1/arbre}\}_{0_1} = \begin{Bmatrix} Fa_1 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix}$

Torseur du roulement 2 sur l'arbre au centre de poussée 0_2 : $\{\tau_{2/arbre}\}_{0_2} = \begin{Bmatrix} -Fa_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}$

1.2. Equilibre de l'arbre (PFD)

$\Sigma\vec{F}_{ext/arbre} = \vec{0}$

/x : $Fa_1 - Fa_2 + X_E = 0$ (1)

/y : $Y_1 + Y_2 + Y_E = 0$ (2)

/z : $Z_1 + Z_2 + Z_E = 0$ (3)

$\Sigma\vec{M}(\vec{F}_{ext/arbre})_{/0} = \vec{0}$

/x : $L_E = 0$ (4)

/y : $x_1.Z_1 - x_2.Z_2 + M_E = 0$ (5)

/z : $- x_1.Y_1 + x_2.Y_2 + N_E = 0$ (6)

Les équations (2), (3), (5) et (6) permettent de calculer $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_2}$, $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$. On définit la charge radiale ($\mathbf{Fr_i}$) de chaque roulement ainsi que sa position angulaire ($\boldsymbol{\beta_i}$) dans le plan $[0_i, y, z]$, soit :

$Fr_1 = \sqrt{Y_1^2 + Z_1^2}$ d'où $\tan\beta_1 = Y_1 / Z_1$ et $Fr_2 = \sqrt{Y_2^2 + Z_2^2}$ d'où $\tan\beta_2 = Y_2 / Z_2$

En considérant les déformations des roulements, la relation reliant l'effort axial et l'effort radial vaut :

$$\begin{cases} Fa_i = Z_i . Q_{Max_i} . \sin\alpha_i . J_{a_i}(\varepsilon_i) \\ Fr_i = Z_i . Q_{Max_i} . \cos\alpha_i . J_{r_i}(\varepsilon_i) \end{cases} \quad \text{on pose} \quad F(\varepsilon_i) = J_{r_i}(\varepsilon_i) / J_{a_i}(\varepsilon_i)$$

soit :

$$Fa_1 = Fr_1 . \tan\alpha_1 / F(\varepsilon_1)$$
$$Fa_2 = Fr_2 . \tan\alpha_2 / F(\varepsilon_2)$$

rapporté dans l'équation (1) nous avons :

$$Fr_1.\tan\alpha_1/F(\varepsilon_1) - Fr_2.\tan\alpha_2/F(\varepsilon_2) + X_E = 0 \qquad \mathbf{(I)}$$

1.3. Equations de déformation

L'expression des déplacements axiaux sont fonctions des conditions liées au calcul de l'enfoncement.

$$\left.\begin{aligned} Q_{Max_i} &= Fr_i / (Z_i . \cos\alpha_i . J_r(\varepsilon_i)) \\ \delta_{Max_i} &= K_i^* . (Q_{Max_i})^{1/m} \\ \delta_{r_i} &= \frac{\delta_{Max_i}}{2\varepsilon_i \cos\alpha_i} \\ \delta_{a_i} &= \delta_{r_i} . \frac{2\varepsilon_i - 1}{\tan\alpha_i} \end{aligned}\right\} \quad \delta_{a_i} = K_i^* . \frac{2\varepsilon_i - 1}{2\varepsilon_i \sin\alpha_i} \left(\frac{Fr_i}{Z_i . \cos\alpha_i . J_r(\varepsilon_i)} \right)^{1/m}$$

soit pour chaque roulement :

$$\delta_{a1} = K_1^* . \frac{2\varepsilon_1 - 1}{2\varepsilon_1 \sin\alpha_1} \left(\frac{Fr_1}{Z_1 . \cos\alpha_1 . J_r(\varepsilon_1)} \right)^{1/m} \qquad \mathbf{(II)}$$

$$\delta_{a2} = K_2^* . \frac{2\varepsilon_2 - 1}{2\varepsilon_2 \sin\alpha_2} \left(\frac{Fr_2}{Z_2 . \cos\alpha_2 . J_r(\varepsilon_2)} \right)^{1/m} \qquad \mathbf{(III)}$$

La déformation dans chaque roulement dépend des conditions suivantes :

a) On installe une précontrainte au montage (pas d'effort extérieur) telle que :

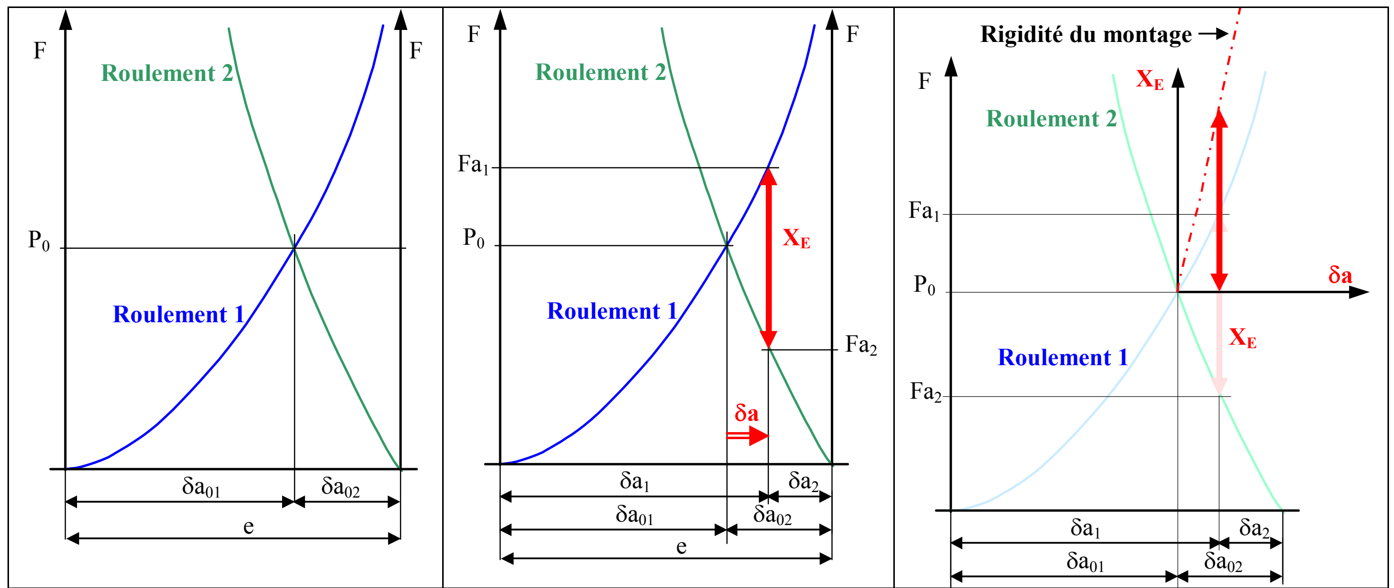
$Fa_{01} = Fa_{02}$ et $e = \delta a_{01} + \delta a_{02}$

b) Pour un montage fonctionnant sous charge axiale extérieure ($X_E \neq 0$) on obtient :

$Fa_2 - Fa_1 = X_E$ et $e = \delta a_1 + \delta a_2$ **(IV)**

Le paramètre **e** représente le jeu axial installé au montage avec :

- $e > 0$: montage précontraint
- $e = 0$: montage sans jeu axial
- $e < 0$: montage avec jeu axial



Si l'on fait le bilan de cette étude, pour 4 inconnues (**Fa_1, Fa_2, δa_1, δa_2**) nous disposons de 4 équations (**I**), (**II**), (**III**), (**IV**), qui permettent de résoudre le problème. La résolution sera itérative.

La déformation dans chaque roulement est :

$$\vec{\delta}_1 = \delta_{a1} . \vec{x} + \delta_{r1} . \left(\vec{Fr}_1 / \left\| \vec{Fr}_1 \right\| \right)$$

$$\vec{\delta}_2 = \delta_{a2} . \vec{x} + \delta_{r2} . \left(\vec{Fr}_2 / \left\| \vec{Fr}_2 \right\| \right)$$

2. DEMARCHE DE CONCEPTION

Données : Fr_1, Fr_2, caractéristiques des roulements **1** et **2**

Hypothèse : Faire un choix du mode de fonctionnement du roulement le moins sollicité : **choix de ε_1**
(ex : $\varepsilon_1 \approx 1$) $\Rightarrow$ $Ja(\varepsilon_1)$ $Jr(\varepsilon_1)$ et $F(\varepsilon_1)$

1. Calcul du comportement du roulement 1

$Fr_1 = Z_1 . Q_{Max_1} . \cos\alpha_1 . J_r(\varepsilon_1)$ et $Fa_1 = Fr_1 . \tan\alpha_1 / F(\varepsilon_1)$

$\Downarrow$

$Q_{Max\,1} = Fr_1 / (Z_1 . \cos\alpha_1 . J_r(\varepsilon_1))$

$\Downarrow$

$\delta_{Max\,1} = K_1^* . (Q_{Max\,1})^{1/m}$

$\Downarrow$

$$\delta_{r1} = \frac{\delta_{Max\,1}}{2\varepsilon_1 \cos\alpha_1} \quad \text{et} \quad \delta_{a1} = \frac{2\varepsilon_1 - 1}{2\varepsilon_1 \sin\alpha_1} . \delta_{Max\,1}$$

2. Calcul du comportement du roulement 2

$Fa_2 = Fa_1 + X_E$ et $Fa_2 = Fr_2 . \tan\alpha_2 / F(\varepsilon_2)$

$\Downarrow$

$F(\varepsilon_2) = Fr_2 . \tan\alpha_2 / Fa_2$

$\Downarrow$

ε_2, $Ja(\varepsilon_2)$ et $Jr(\varepsilon_2)$ **par interpolation linéaire**

$\Downarrow$

$Q_{Max\,2} = Fr_2 / (Z_2 . \cos\alpha_2 . J_r(\varepsilon_2))$

$\Downarrow$

$\delta_{Max\,2} = K_2^* . (Q_{Max\,2})^{1/m}$

$\Downarrow$

$$\delta_{r2} = \frac{\delta_{Max\,2}}{2\varepsilon_2 \cos\alpha_2} \quad \text{et} \quad \delta_{a2} = \frac{2\varepsilon_2 - 1}{2\varepsilon_2 \sin\alpha_2} . \delta_{Max\,2}$$

3. CALCUL DE LA PRECONTRAINTE (*preload*)

Associé à un état de chargement imposé (ε > 0,5), il est nécessaire d'installer une précontrainte $\mathbf{P_0}$. Les principaux effets de cette précharge dans un montage de roulement sont :

- L'augmentation de la rigidité du montage ;
- Diminution du bruit de fonctionnement ;
- Guidage plus précis de l'arbre ;
- Compensation de l'usure et des processus de « tassement » en fonctionnement ;
- Augmentation de la durée de vie.

La **Figure 6** montre bien l'influence de la précontrainte sur le comportement de la rigidité du montage. Le **cas 1** représente un montage non précontraint avec un seul roulement chargé axialement. Le **cas 2** représente un montage précontraint mais sous le chargement extérieur $\mathbf{X_E}$ le roulement **2** se trouve complètement déchargé (**Méthode ISO**). Le dernier cas (**cas 3**), montre qu'une précontrainte $\mathbf{P_0}$ suffisamment importante permet de faire participer les deux roulements simultanément sur la répartition de la charge axiale extérieure $\mathbf{X_E}$.

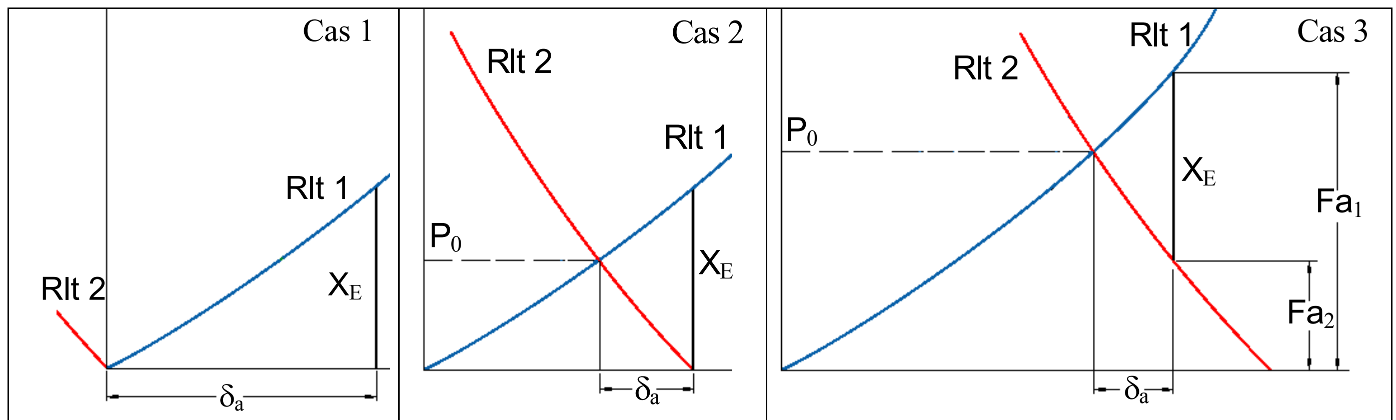


Figure 6 : Evolution de la rigidité en fonction de la précontrainte $\mathbf{P_0}$

On installe une précontrainte au montage (pas d'effort extérieur) telle que :

$$Fa_{01} = Fa_{02} = P_0$$

Le chargement est purement axial ($Ja(\varepsilon_i \rightarrow \infty) = 1$)

$$\delta a_{01} = \frac{K_1^*.P_0^{1/m}}{Z_1^{1/m}.\sin\alpha_1^{(1+m)/m}} \quad \text{et} \quad \delta a_{02} = \frac{K_2^*.P_0^{1/m}}{Z_2^{1/m}.\sin\alpha_2^{(1+m)/m}}$$

Jeu axial (**e**) :

$$e = \delta a_1 + \delta a_2 = \delta a_{01} + \delta a_{02}$$

A partir de cette dernière relation nous en déduisons l'expression de la précontrainte $\mathbf{P_0}$:

$$P_0 = \frac{e^m}{\left(\dfrac{K_1^*}{Z_1^{1/m}.\sin\alpha_1^{(1+m)/m}} + \dfrac{K_2^*}{Z_2^{1/m}.\sin\alpha_2^{(1+m)/m}}\right)^m}$$

Le choix de la précontrainte à installer dépend de l'objectif à atteindre : maximiser la durée de vie et/ou maximiser la rigidité de la liaison. Dans les deux cas cela nécessite d'avoir au minimum la moitié des éléments roulants chargés (ε > 0,5). Si l'on se réfère à la description de la **Figure 4** la durée de vie maximale d'un roulement est obtenue pour (ε ≈ 1). Le choix d'un ε > 1 améliore la rigidité au détriment de la durée de vie. Cependant, compte tenu de l'allure des courbes de rigidité, une augmentation importante de la précontrainte n'a que peu d'effet sur le gain en rigidité.

4. RECHERCHE D'UNE CONFIGURATION OPTIMALE CONDUISANT A UNE RIGIDITE MAXIMALE

On désire rechercher une configuration optimale d'une liaison pivot constituée de deux roulements et soumis à un chargement radial **F** à l'extrémité de l'arbre (**Figure 7**).
L'étude du comportement global de la liaison pivot de la **Figure 7** peut être obtenue par la superposition des déformations des roulements (**a**) et de l'arbre (**b**).

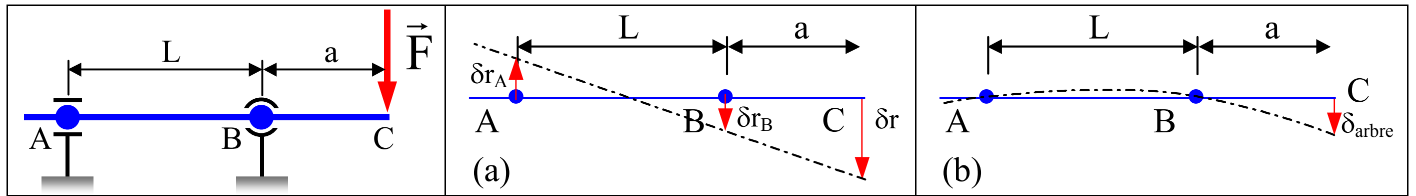


Figure 7 : Comportement d'une liaison pivot à deux roulements

4.1. Déformation des roulements

Hypothèse : arbre infiniment rigide.

On pose le paramètre adimensionnel : $\lambda = a/L$

$$\frac{\delta r_A + \delta r_B}{L} = \frac{\delta r + \delta r_A}{L + a}$$

L'expression du déplacement radial **δr** au point **C** vaut :

$$\delta r = (1+\lambda).\delta r_B + \lambda.\delta r_A \qquad (1)$$

Déformation dans chaque roulement :

$$\delta r_A = S_A.Fr_A^{1/m} \qquad (2)$$

$$\delta r_B = S_B.Fr_B^{1/m} \qquad (3)$$

Equilibre statique de l'arbre :

$Fr_B = F + Fr_A$

$Fr_A \,.\, L = F \,.\, a$

Soit en tenant compte de **λ** :

$$Fr_A = \lambda \,.\, F \qquad (4)$$

$$Fr_B = (\lambda + 1) \,.\, F \qquad (5)$$

En combinant l'ensemble de ces relations, l'expression du déplacement radial **δr** en **C** devient :

$$\delta r = F^{1/m}\left[(1+\lambda)^{\frac{m+1}{m}}.S_B + \lambda^{\frac{m+1}{m}}.S_A\right] \qquad \textbf{[I]}$$

4.2. Déformation de l'arbre (*shaft*)

Dans la zone $0 \le x \le L$: $\quad Mf_1 = -\lambda \,.\, F \,.\, x$

Dans la zone $L \le x \le L + a$: $\quad Mf_2 = -F \,.\, (L + a - x)$

On obtient l'expression de la flèche δ_{arbre} en **C** à partir des équations de la déformée soit :

$\delta_{arbre} = y_{(x = L + a)}$

$$\delta_{arbre} = \frac{F.a^2}{3.E.I_{GZ}}.(a + L) \qquad \text{ou encore} \qquad \delta_{arbre} = \frac{F.a^3}{3.E.I_{GZ}}.\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \qquad \textbf{[II]}$$

4.3. Déplacement global Δ (Figure 8)

Par superposition des deux comportements [**I**] et [**II**], on obtient le déplacement radial réel **Δ** de l'extrémité de l'arbre.

$\Delta = \delta r + \delta_{arbre}$

$$\Delta = F^{1/m}\left[(1+\lambda)^{\frac{m+1}{m}}.S_B + \lambda^{\frac{m+1}{m}}.S_A\right] + \frac{F.a^3}{3.E.I_{GZ}}.\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

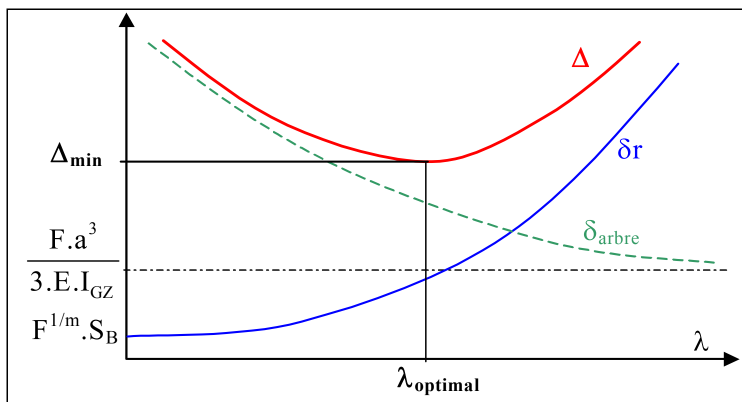


Figure 8 : Déplacement global Δ

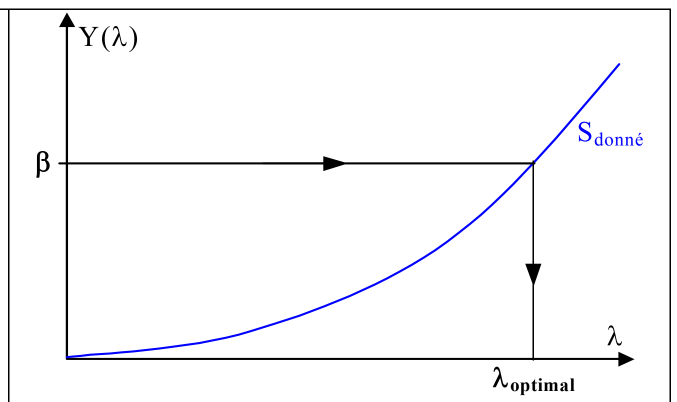


Figure 9 : Courbe Y(λ) = β

4.4. Rigidité maximale

Si l'on souhaite obtenir une rigidité maximale, il convient de déterminer le déplacement minimal (Δ_{min}) en bout d'arbre.

$$\frac{d\Delta}{d\lambda} = \frac{m+1}{m}.F^{1/m}.\left[(1+\lambda)^{\frac{1}{m}}.S_B + \lambda^{\frac{1}{m}}.S_A\right] - \frac{F.a^3}{3.E.I_{GZ}.\lambda^2} = 0$$

On pose le paramètre de souplesse adimensionnel $S = S_A/S_B$

$$\lambda^2.\left[(1+\lambda)^{\frac{1}{m}} + \lambda^{\frac{1}{m}}.S\right] = \beta \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{F^{\frac{m-1}{m}}.a^3.m}{3.E.I_{GZ}.S_B.(m+1)}$$

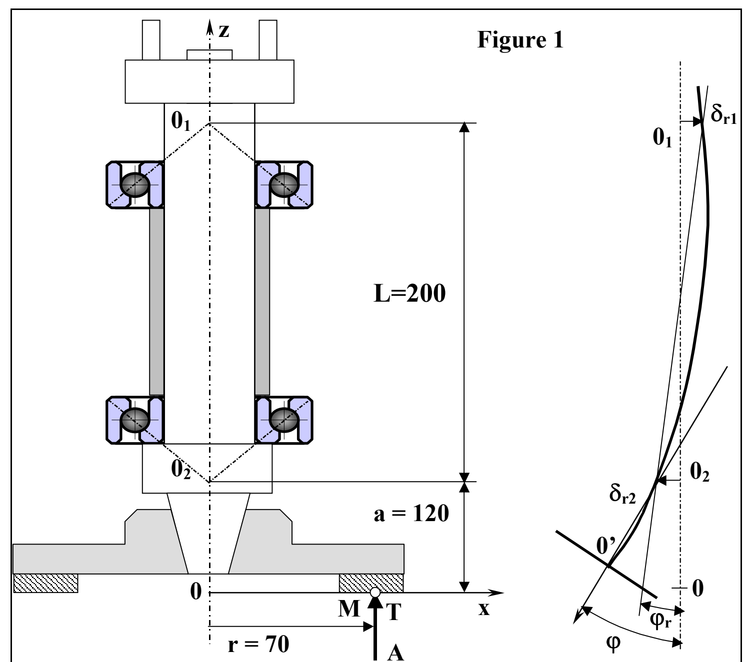
Pour des roulements connus, un effort radial donné et une section prédéfinie, on détermine le paramètre **β** comme une valeur constante connue.

Pour un **β** et un **S** donnés il est possible de tracer une fonction $Y(\lambda) = \beta$ qui modélise la rigidité optimale par le biais du paramètre adimensionnel **λ** (**Figure 9**).

C. EXERCICE : BROCHE D'UNE RECTIFIEUSE PLANE A AXE VERTICAL

1. INTERET DU PROBLEME

La **figure 1** représente le montage d'une broche de rectifieuse plane à axe vertical.
Sous l'action des efforts de coupe, la meule s'incline d'un angle φ par rapport à l'axe de rotation théorique, ce qui introduit un défaut de planéité sur la surface à rectifier.
Le but du problème est de calculer la partie φ_r de l'inclinaison de la meule due aux déflexions radiales des roulements dans le cas d'un chargement jugé le plus défavorable.



2. ÉTUDE STATIQUE

Dans le cas du chargement jugé le plus défavorable on admet que le torseur au point M des efforts de coupe s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{R} = T\vec{y} + A\vec{z} \\ \vec{M} = 0 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad A = 480\text{ N et } T = 90\text{ N}$$

L'entraînement de la broche se fait par l'intermédiaire d'un accouplement transmettant un couple pur d'axe $\vec{z}$.

Q_1 : Déterminer les efforts radiaux $\mathbf{F_{R1}}$ et $\mathbf{F_{R2}}$ supportés par les roulements $\mathbf{0_1}$ et $\mathbf{0_2}$.
Q_2 : Donner la valeur de l'angle **β** entre les directions de ces efforts.

3. ÉTUDE DU MONTAGE DE LA BROCHE

La broche est montée sur deux roulements à contact oblique 7216 ACD : 80 x 140 x 26 ($\alpha = 25°$), pour lesquels un essai de déformation sous charge axiale pure de 1000 N donne une déflexion de 11,75 μm.

billes à contact oblique	**C**	Z	Dm	Dw	2ri/Dw	2re/Dw
7216 ACD	92300 N	15	110,08	19,050	1,035	1,06

Sous les efforts précédemment définis, on fait l'hypothèse que le roulement supérieur $\mathbf{0_1}$ reste, juste chargé sur toute sa périphérie ($\varepsilon_1 = 1$).

Q_3 : Déterminer les efforts axiaux ($\mathbf{F_{A1}}$ et $\mathbf{F_{A2}}$), les déformations radiales (δ_{r1} et δ_{r2}), et axiales (δ_{a1} et δ_{a2}), dans les roulements.
Q_4 : En déduire :

- La valeur de précharge $\mathbf{P_0}$ nécessaire ;
- Le déplacement du point **0** ;
- L'inclinaison φ_r de la broche due aux déformations des roulements.

REPONSE Q_1

Calcul statique : ***arbre de broche isolé***

a. Actions extérieures

b. Principe fondamentale de la Dynamique (PFD)

TRD : $\Sigma\vec{F}_{ext\,/\,arbre} = \vec{0}$

TMD : $\Sigma\vec{M}(\vec{F}_{ext\,/\,arbre})_{/\,0} = \vec{0}$

Récapitulatif

REPONSE Q_2

Calcul de l'angle β :

REPONSE Q_3

Calcul des paramètres $\mathbf{F_{A1}}$, $\delta_{\mathbf{r1}}$, $\delta_{\mathbf{a1}}$, du roulement $\mathbf{R_1}$

a. Calcul de $\mathbf{F_{A1}}$

Hypothèse :

b. Calcul de $\mathbf{Q_{1\,Max}}$

c. Calcul de $\delta_{\mathbf{1\,Max}}$

d. Calcul de $\delta\mathbf{r_1}$ **et** $\delta\mathbf{a_1}$

Calcul des paramètres $\mathbf{F_{A2}}$, $\delta_{\mathbf{r2}}$, $\delta_{\mathbf{a2}}$, du roulement $\mathbf{R_2}$

e. Calcul de $\mathbf{F_{A2}}$

f. Calcul de $F(\varepsilon_2)$, ε_2, $Jr(\varepsilon_2)$, $Ja(\varepsilon_2)$

g. *Calcul de* $Q_{2\ Max}$

h. *Calcul de* $\delta_{2\ Max}$

i. *Calcul de* δr_2 et δa_2

j. ***Calcul du paramètre de précontrainte e***

REPONSE Q_4

a. ***Calcul de la précontrainte*** P_0

- ***Calcul du déplacement*** δ_{a01} ***du roulement*** R_1 ***pour la précontrainte*** P_0

- ***Calcul du déplacement*** δ_{a02} ***du roulement*** R_2 ***pour la précontrainte*** P_0

b. ***Calcul du déplacement axial du point 0***

c. ***L'inclinaison*** φ_r ***de la broche***

D. BIBLIOGRAPHIE

M. Aublin & Co *Systèmes Mécanique : Théorie et dimensionnement.*
Edition Dunod, 2ème édition 1992

T.A. Harris *Rolling bearing analysis.*
Edition John Wiley & Sons, second edition 1984

Cours de technologie : Les roulements.
ENS Cachan, Maîtrise 1990.

AFNOR *Précis de Construction mécanique*
Tome 3 : Calcul, technologie et normalisation
Edition NATHAN, 1ère édition, 1986.

J.L. Fanchon *Guide des Sciences et Technologies industrielles*
AFNOR. Edition NATHAN, 1ère édition, 2001.

L. Houpert *A Uniform Analytical Approach for Ball and Roller Bearings Calculations.*
ASME Journal of Tribology, October 1997, Vol 119, pp 851-858.

X. Hernot & Co *Calculation of the Stiffness Matrix of Angular Contact Ball Bearings by Using the Analytical Approach.*
ASME Journal of Mechanical Design March 2000, Vol 122, pp 83-90

X. Hernot *Modélisation des arbres et des paliers à roulements en vue de l'optimisation de l'ensemble arbre-paliers.*
Thèse Sciences pour l'ingénieur INSA, Février 1998, Toulouse, FRANCE.

SKF Documentation technique et CD-Rom
Les différentes images sur les roulements sont issues du support numérique

Timken Documentation technique et CD-Rom

SNR Documentation technique et CD-Rom

INA Documentation technique et CD-Rom

ANNEXE : CARACTERISTIQUES DE QUELQUES ROULEMENTS A BILLES A CONTACT OBLIQUE

Dimensions générales : Angle de contact α_0 = 40° ri/Dw = 0,52 ra/Dw = 0,53

	d_m	Dw	Z
7000	---	---	---
7001	---	---	---
7002	---	---	---
7003	---	---	---
7004	31,9	7,938	11
7005	36,9	7,938	13
7006	43,8	8,731	14
7007	49,8	9,525	15
7008	54,9	10,319	15
7009	---	---	---
7010	---	---	---
7011	---	---	---
7012	---	---	---
7013	---	---	---
7014	---	---	---
7015	---	---	---
7016	---	---	---
7017	---	---	---
7018	---	---	---
7019	---	---	---
7020	---	---	---

	d_m	Dw	Z
7200	22	5,95	10
7201	23,6	6,35	10
7202	25,85	7,144	10
7203	29,75	7,938	10
7204	34,75	9,525	10
7205	39,3	10	11
7206	46,9	11,906	11
7207	55,6	12,7	13
7208	62,5	13,494	13
7209	66,75	14,288	14
7210	70,9	15,081	14
7211	79,5	15,875	15
7212	88,35	16,669	16
7213	96,25	17,462	16
7214	101,25	18,256	16
7215	102	19,05	15
7216	111	19,05	17
7217	119	20,638	17
7218	127,5	22,225	17
7219	---	---	---
7220	142	25,4	16

	d_m	Dw	Z
7300	---	---	---
7301	---	---	---
7302	30,6	8,73	10
7303	34,5	9,525	10
7304	38,3	10,5	10
7305	45,6	12,7.	10
7306	53,5	14,288	11
7307	59,5	15,875	11
7308	67,5	17,462	11
7309	75,5	19,05	11
7310	83,4	20,638	12
7311	91,3	22,225	12
7312	99,2	23,812	12
7313	107	25,4	12
7314	112	25,4	13
7315	118	28,575	12
7316	125	30,162	12
7317	---	---	---
7318	142	31,75	13
7319	---	---	---
7320	1607	36,512	13

DIMENSIONNEMENT DES ASSEMBLAGES PAR ELEMENTS FILETES

DESIGN OF THREADED FASTENERS OR BOLTED ASSEMBLIES

A. DONNEES GENERALES

1. DEFINITIONS

Vis (*screw***)** : pièce constituée d'une tige filetée, avec ou sans tête, mais comportant un dispositif d'immobilisation ou d'entraînement.

Ecrou (*nut***)** : pièce taraudée comportant un dispositif d'entraînement et destinée à être vissée soit à l'extrémité d'une vis pour constituer un boulon, soit à l'extrémité libre d'un goujon pour assurer le serrage entre la face d'appui de la pièce d'implantation et l'une des faces de l'écrou.

Boulon (*bolt***)** : ensemble constitué d'une vis à tête et d'un écrou et destiné normalement à assurer un serrage entre la face d'appui de la tête et celle de l'écrou.

Corps de boulon : terme admis en remplacement du mot vis pour désigner les vis comportant un dispositif d'immobilisation spécial (ergot, collet carré, etc.)

Goujon (*stud bolt***)** : tige comportant un filetage (*threads*) à ses deux extrémités et destinée à assurer un serrage entre la face d'une pièce dans laquelle une des extrémités vient s'implanter à demeure par vissage et la face d'appui d'un écrou vissé sur l'autre extrémité

Noyau : partie cylindrique de la tige d'une vis qui n'a pas été entamée par le filetage.

2. NORMALISATION

L'AFNOR a réuni dans un recueil « Boulonnerie Visserie » les principales normes relatives aux éléments d'assemblages filetés (vis, goujons, écrou). Ces recommandations concernent en particulier les matériaux, les spécifications d'essais, les dimensions et tolérances et les outillages de serrage. Parmi ces normes, celles relatives aux spécifications techniques des articles de boulonnerie d'usage général et à serrage contrôlé (boulonnerie Haute Résistante (HR)) nous paraissent particulièrement importantes NF E 27-005, E 27-009, E 27-701 et E 27-702.

Elles définissent :

- Les **couples de dimensions (diamètre nominal et pas)** pour la boulonnerie à pas fin et à pas gros (pas normal) (tables 1 et 2).
- La **section résistante A_S des filetages** : section d'une tige cylindrique de résistance équivalente à celle de la partie filetée de la vis ; cette donnée essentielle permet de passer, au cours des essais réalisés sur la pièce filetée (ou au cours des calculs), des efforts aux contraintes (tables 1 et 2).
- Les **classes de qualités des articles de boulonnerie en acier** : chaque classe de qualité définit les caractéristiques des matériaux exigées pour les vis et goujons (table 3) et pour les écrous (table 4) dans le cadre d'essais de caractérisation.
- Les **essais de caractérisation** du métal sur éprouvette ($R_{m\,min}$, $R_{e\,min}$, A_S, KCU_{min} à 20°C) (tables 3 et 4).
- Les essais de caractérisation de l'élément sur vis ou goujon entier (résistance à la charge d'épreuve, résistance à la traction avec cale biaise) (tables 3 et 4).
- Les **essais de fatigue sous charge axiale** : la norme NF E 27-009 définit parfaitement les conditions d'essais et de présentation des résultats ; toutefois ; aucune donnée concernant les valeurs limites des contraintes de fatigue n'est indiquée.
- **L'aptitude à l'emploi** ne concerne que la boulonnerie à serrage contrôlé destinée à l'exécution des construction métalliques (classes 8.8 et 10.9) (d'après NF E 27-701 et NF E 27-702). Cet essai consiste à vérifier la qualité de l'ensemble vis/écrou/rondelle lors d'une mise en précontrainte de l'assemblage par rotation de l'écrou.
- **Fabrication :** les vis sont frappées à froid ou forgées à chaud suivant leur dimension, le filetage est roulé. Pour les classes de qualités 8.8 et supérieures, un traitement thermique de trempe et revenu est obligatoire. Pour la boulonnerie courante, se reporter à la norme NF A 35-501, pour un emploi à température élevée à la norme NF A 35-558 et à basse température à la norme NF A 35-559.

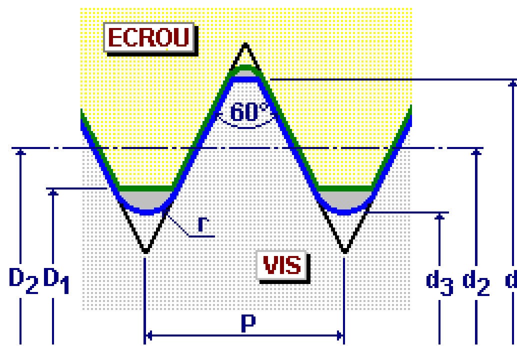


Figure 1 : Diamètres caractéristiques

d : diamètre nominal (*basic major diameter*)
D_1 : diamètre intérieur de l'écrou
$d_2 = D_2$: diamètre sur flancs (*basic pitch diameter*)
$d_2 = d - 0{,}6495.P$
d_3 : diamètre du noyau $d_3 = d - 1{,}2268.P$
r : rayon de filet
P : pas (*pitch*)

Tableau 2 - Filetage à pas fin (1)							
		Valeurs calculées correspondantes					
Diamètre nominal (2) d = D (mm)	Pas P (mm)	Diamètre sur flancs $d_2 = D_2$ (mm)	Diamètre du noyau de la vis d_3 (mm)	Diamètre intérieur de l'écrou D_1 (mm)	Rayon à fond de filet (3) r (mm)	Diamètre résistant d_s (mm)	Section résistante $A_S = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d_2 + d_3}{2}\right)^2$ (mm²)
8	1	7.351	6.773	6.918	0.144	7.062	39.2
10	1.25	9.188	8.467	8.647	0.180	8.827	61.2
12	1.25	11.188	10.467	10.647	0.180	10.827	92.1
14	1.5	13.026	12.160	12.376	0.216	12.593	125
16	1.5	15.026	14.160	14.376	0.216	14.593	167
18	1.5	17.026	16.160	16.376	0.216	16.593	216
20	1.5	19.026	18.160	18.376	0.216	18.593	272
22	1.5	21.026	20.160	20.376	0.216	20.593	333
24	2	22.701	21.546	21.835	0.289	22.124	384
27	2	25.701	24.546	24.835	0.289	25.124	496
30	2	28.701	27.546	27.835	0.289	28.124	621
33	2	31.701	30.546	30.835	0.289	31.124	761
36	3	34.052	32.320	32.752	0.433	33.186	865
39	3	37.052	35.320	35.752	0.433	36.186	1028

(1) **Désignation** : par exemple, M8x1 (diamètre nominal d = 8 mm et p = 1 mm).
(2) **Employer de préférence les diamètres en caractères gras.**
(3) r = valeur calculée du rayon de l'outil neuf à profil circulaire (donnée à titre indicatif)

Tableau 2 - Filetage à pas gros (1)							
		Valeurs calculées correspondantes					
Diamètre nominal (2) **d = D** (mm)	**Pas P** (mm)	**Diamètre sur flancs** $d_2 = D_2$ (mm)	**Diamètre du noyau de la vis** d_3 (mm)	**Diamètre intérieur de l'écrou** D_1 (mm)	**Rayon à fond de filet** (3) **r** (mm)	**Diamètre résistant** d_s (mm)	**Section résistante** A_s (mm²)
1	**0.25**	**0.838**	**0.693**	**0.729**	**0.036**	**0.765**	**0.460**
(1.1)	0.25	0.938	0.793	0.829	0.036	0.865	0.588
1.2	**0.25**	**1.038**	**0.893**	**0.929**	**0.036**	**0.965**	**0.732**
1.4	0.3	1.205	1.032	1.075	0.043	1.119	0.983
1.6	**0.35**	**1.373**	**1.171**	**1.221**	**0.050**	**1.272**	**1.27**
1.8	**0.35**	**1.573**	**1.371**	**1.421**	**0.050**	**1.472**	**1.70**
2	**0.4**	**1.740**	**1.509**	**1.567**	**0.058**	**1.625**	**2.07**
2.2	0.45	1.908	1.648	1.713	0.065	1.778	2.48
2.5	**0.45**	**2.208**	**1.948**	**2.013**	**0.065**	**2.078**	**3.39**
3	**0.55**	**2.643**	**2.325**	**2.459**	**0.072**	**2.484**	**4.85**
3.5	0.6	3.110	2.764	2.850	0.087	2.937	6.78
4	**0.7**	**3.545**	**3.141**	**3.242**	**0.101**	**3.343**	**8.78**
(4.5)	0.75	4.013	3.580	3.688	0.108	3.796	11.3
5	**0.8**	**4.480**	**4.019**	**4.134**	**0.116**	**4.249**	**14.2**
6	**1**	**5.351**	**4.773**	**4.918**	**0.144**	**5.062**	**20.1**
(7)	1	6.351	5.773	5.918	0.144	6.062	28.9
8	**1.25**	**7.188**	**6.467**	**6.647**	**0.180**	**6.827**	**36.6**
10	**1.5**	**9.026**	**8.160**	**8.376**	**0.216**	**8.593**	**58.0**
12	**1.75**	**10.863**	**9.853**	**10.106**	**0.253**	**10.358**	**84.3**
14	2	12.701	11.546	11.835	0.289	12.124	115
16	**2**	**14.701**	**13.546**	**13.835**	**0.289**	**14.124**	**157**
18	2.5	16.376	14.933	15.294	0.361	15.655	192
20	**2.5**	**18.376**	**16.933**	**17.294**	**0.361**	**17.655**	**245**
22	2.5	20.376	18.933	19.294	0.361	19.655	303
24	**3**	**22.052**	**20.320**	**20.753**	**0.433**	**21.186**	**353**
27	3	25.052	23.320	23.752	0.433	24.186	459
30	**3.5**	**27.727**	**25.706**	**26.211**	**0.505**	**26.716**	**561**
33	3.5	30.727	28.706	29.211	0.505	29.716	694
36	**4**	**33.402**	**31.093**	**31.670**	**0.577**	**32.247**	**817**
39	4	36.402	34.093	34.670	0.577	35.247	976

(1) **Désignation** : par exemple, M8 (diamètre nominal d de 8 mm) sans indication de pas.
(2) **Eviter les valeurs en maigre et surtout entre parenthèses**
(3) r = valeur calculée du rayon de l'outil neuf à profil circulaire (donnée à titre indicatif)

Tableau 3 – Caractéristiques mécaniques des vis et goujons en fonction de leur classe de qualité (d'après norme NF EN ISO 898-1)													
Caractéristique mécanique contrôlée			Classe de qualité des vis et goujons										
			3.6	4.6	4.8	5.6	5.8	6.8	8.8		9.8	10.9	12.9
									d<16	d>16			
Résistance à la traction R_m (en MPa)	nominale	nom	300	400		500		600	800	800	900	1000	1200
	minimale	min.	330	400	420	500	520	600	800	830	900	1040	1220
Dureté Vickers, HV		min.	95	120	130	155	160	190	250	255	290	320	385
		max.	220					250	320	335	360	380	435
Dureté Brinell HB		min.	90	114	124	147	152	181	238	242	276	304	366
		max.	209					238	304	318	342	361	314
Dureté Rockwell	min	HRB	52	67	71	79	82	89	-	-	-	-	-
		HRC	-	-	-	-	-	-	22	23	28	32	39
	max	HRB	95					99,5	-	-	-	-	-
		HRC	-	-	-	-	-	-	32	34	37	39	44
Limite inférieur d'écoulement R_{eL} (en MPa)		min.	190	240	340	300	420	480	-	-	-	-	-
Limite conventionnelle d'élasticité $R_{p0,2}$ (en MPa)		min.	-	-	-	-	-	-	640	660	720	940	1100
Contrainte à la charge d'épreuve (en MPa)			180	225	310	280	380	440	580	600	650	830	970
Allongement pour-cent après rupture A :		min.	25	22	-	20	-	-	12	12	10	9	8
Résistance à la traction avec cale biaise			Pour vis entières : valeurs minimales de resistance à la traction.										
Résilience KU à + 20°C		J min.	-	-	-	25	-	-	30	30	25	20	15
Solidité de la tête			Aucune rupture										
Décarburation : profondeur maximale de décarburation		mm	-	-	-	-	-	-	0,015				

Tableau 4 – Caractéristiques mécaniques des écrous en fonction de leur classe de qualité (d'après norme NF E 27-005)								
Caractéristique mécanique contrôlée		Classe de qualité des écrous						Domaine d'application
		4	5	6	8	10	12	
Contrainte unitaire lors de l'épreuve de charge (en MPa)		392	490	588	784	980	1 176	Tous les écrous, à l'exception de ceux exclus par accord entre client et fournisseur
Dureté Brinell HB	max.	302				353		Tous les écrous
ou								
Dureté Rockwell HRC (1)	max.	30				36		Tous les écrous

(1) La conversion des valeurs de dureté Brinell en valeurs de dureté Rockwell a été effectuée d'après l'Euronorm 8-55.

2.1. Note sur les classes de qualités

Vis : la classe de qualité est symbolisée par deux nombres séparés d'un point (par exemple 10.9). Le premier nombre correspond sensiblement au 100ème de la résistance minimale à la traction (exprimée en MPa) et le second indique sensiblement 10 fois la valeur du rapport entre la limite minimale d'élasticité et la résistance à la traction de la vis ou du goujon.

*Exemple : pour une vis de classe 10.9 on a Rm ≈ 100 * 10 = 1000 MPa et Re ≈ 9 * Rm / 10 = 900 MPa*

Ecrous : la classe de qualité est symbolisée par un nombre (par exemple 8). Ce nombre correspond sensiblement au 100ème de la contrainte minimale (exprimée en MPa) exercée sur la vis lors de l'essai de traction sur l'écrou.

Exemple : pour une écrou de classe 8, on doit pouvoir appliquer sans obtenir de déformation de l'écrou une force amenant une contrainte d'environ 800 MPa dans la section résistante de la vis (contrainte minimale de rupture de la classe de qualité).

Rondelles : ces pièces ne comportent une désignation de qualité que dans le cas de la boulonnerie à serrage contrôlé (NF E 27-701 et E 27-702), elle est similaire à celle des vis.

Boulons : la classe de qualité est symbolisée par deux nombres séparés d'un point (par exemple 10.9). Le boulon doit être constitué d'une vis (et de une ou deux rondelles dans le cas de serrage contrôlé) de classe de qualité identique à celle du boulon ainsi que d'un écrou dont la classe de qualité est égale au premier nombre de la classe de qualité du boulon (pour l'exemple : 10).

Nous constatons donc que la **classe de qualité d'un boulon** est tout à fait **caractéristique** de la résistance de la matière constituant la **vis**.

De plus, la contrainte d'épreuve de la vis correspond sensiblement à 0.9 fois la limite minimale d'élasticité de la classe de qualité (absence de déformation permanente de la vis sous charge d'épreuve). Hors, pour l'écrou, la classe de qualité est directement liée à la charge d'épreuve ; il s'ensuit que la contrainte d'épreuve de l'écrou est toujours bien supérieure à celle de la vis (elle est approximativement celle de la classe de qualité supérieure).

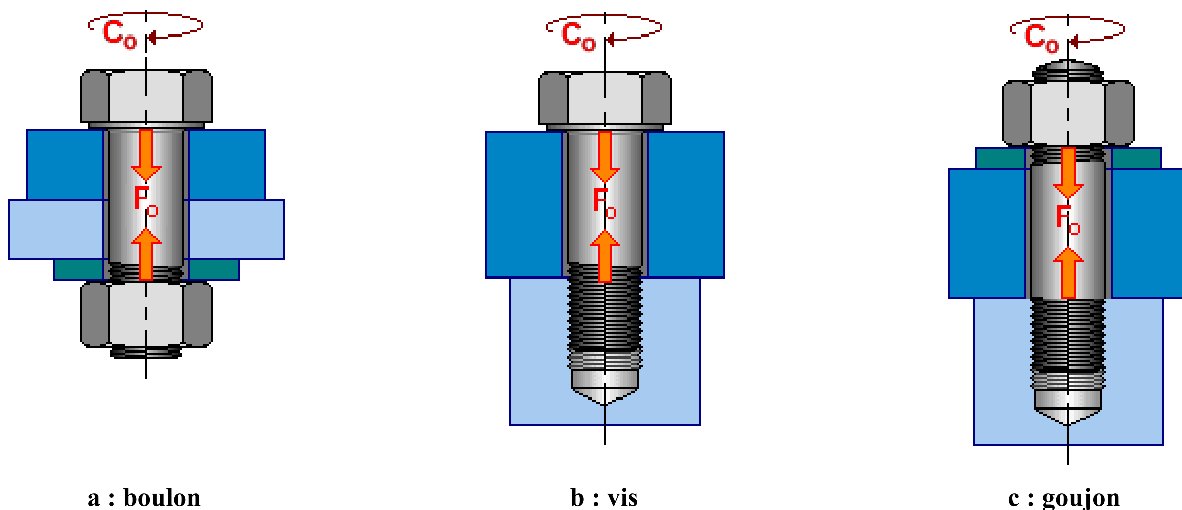
Exemple : pour une vis 10.9 la charge d'épreuve est 776 MPa (table 3). L'écrou de classe 10 ne doit pas se déformer plastiquement sous une charge d'épreuve de 980 MPa (table 4). Cela correspond sensiblement à la charge d'épreuve de la vis de qualité supérieure (12.9) : 931 MPa.

On peut donc en conclure que **dans un boulon** qui respecte la normalisation**, l'écrou est toujours bien plus résistant que la vis** et qu'il ne sera pas utile de vérifier sa résistance, ceci est parfaitement vérifié dans la pratique.

Pour les vis à tête hexagonale, les vis à tête cylindrique à six pans creux de diamètre nominal égal ou supérieur à 5 mm, le **marquage** de la classe de qualité en creux ou en relief est **obligatoire** pour les classes de qualité égales ou supérieures à 5.6. Il en est de même pour les écrous de classes de qualité égales ou supérieures à 5.

3. DETERMINATION DU COUPLE DE SERRAGE

Pour réaliser un assemblage boulonné, il est nécessaire d'introduire une force de serrage F_0 dans la liaison. Pour cela, on applique en général à l'écrou (ou à la tête de la vis) un couple moteur de serrage C_0 à l'aide d'une clé (Figure 2). Le couple résistant égal et de signe opposé résulte des actions sur l'écrou des forces de contact des filets de la vis et des pièces assemblées (ou de la rondelle).



a : boulon **b : vis** **c : goujon**

Figure 2 : Précharge (*preload*) et couple (*torque*) dans des assemblages boulonnés

On peut écrire :

$C_0 = C_1 + C_2$

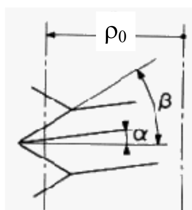
Avec C_1 couple dû aux forces de contact des filets de la vis sur l'écrou.

C_2 couple dû aux forces de contact de la pièce (ou de la rondelle) sur l'écrou.

3.1. Expression de C_1

On utilise couramment l'expression suivante :

$C_1 = F_0\ \rho_0 \tan(\alpha + \varphi_1)$



Avec :

F_0 force de serrage des pièces

ρ_0 rayon moyen du filet

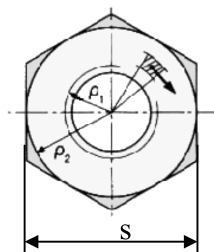
α Angle moyen de l'hélice

φ_1 Angle de frottement fictif tel que $\tan \varphi_1 = f' = f_1 / \cos \beta$ et f_1 coefficient de frottement vis / écrou

3.2. Expression de C_2

On exploite :

$$C_2 = F_0\, f_2\, \rho$$



Avec

F_0 force de serrage des pièces

f_2 coefficient de frottement (*friction*) pièce (ou rondelle)/écrou

$\rho = 2 / 3 * (\rho_2^3 - \rho_1^3) \ / (\rho_2^2 - \rho_1^2) \approx \rho_m$ ou r_m valeur moyenne équivalente à $(\rho_1 + \rho_2) / 2$ (voir table 5)

Tableau 5 - Caractéristique des écrous H					
Diamètre nominal (mm)	ρ_1 **d / 2** (mm)	**s** (mm)	ρ_2 **s / 2** (mm)	ρ_m **ou** r_m **(ρ1+ρ2)/2** (mm)	ρ (mm)
1.6	**0.8**	**3.2**	**1.6**	**1.2**	**1.24**
2	**1**	**4**	**2**	**1.5**	**1.56**
2.5	**1.25**	**5**	**2.5**	**1.88**	**1.94**
3	**1.5**	**5.5**	**2.75**	**2.13**	**2.19**
4	**2**	**7**	**3.5**	**2.75**	**2.82**
5	**2.5**	**8**	**4**	**3.25**	**3.31**
6	**3**	**10**	**5**	**4**	**4.08**
8	**4**	**13**	**6.5**	**5.25**	**5.35**
10	**5**	**16**	**8**	**6.5**	**6.62**
12	**6**	**18**	**9**	**7.5**	**7.60**
14	*7*	*21*	*10.5*	*8.75*	*8.87*
16	**8**	**24**	**12**	**10**	**10.13**
20	**10**	**30**	**15**	**12.5**	**12.67**
24	**12**	**36**	**18**	**15**	**15.20**
30	**15**	**46**	**23**	**19**	**19.28**

3.3. Expression du couple de serrage C (*bolt torque*)

Le couple de serrage s'exprime sous la forme suivante :

$$C_0 = F_0\, \rho_0 \tan(\alpha + \varphi_1) + F_0\, f_2\, \rho$$

En exprimant que les angles α et φ_1 sont petits et en introduisant le pas du filetage P avec t $\tan \varphi_1 = f' = f_1 / \cos \beta$ et $P = \pi\, d_2 \tan \alpha$ e, on obtient :

$$C_0 = F_0\, (P / 2\pi + f'\, \rho_0 + f_2\, \rho)$$

Cette expression met bien en évidence les trois composantes du couple de serrage :

- ✓ $F_0\, P / 2\pi$: couple qui produit la mise sous tension F_0 du boulon et assure le serrage des pièces assemblées.
- ✓ $F_0\, f'\, \rho_0$: couple qui sert à vaincre le frottement des filets de l'écrou sur la vis.
- ✓ $F_0\, f_2\, \rho$: couple qui sert à vaincre le frottement de l'écrou sur la rondelle ou sur les pièces.

Pour les assemblages filetés normalisés, le couple de serrage peut s'exprimer sous la forme usuelle suivante :

$$C_0 = F_0\, (0.16\, P + 0.583\, d_2\, f_1 + \rho\, f_2)$$

Ces expressions sont entachées d'erreurs dues aux différentes approximations réalisées. Toutefois, il est facile d'écrire les expressions exactes et de montrer que l'erreur totale introduite reste dans tous les cas inférieure à 1%. Celle-ci est tout à fait négligeable par rapport aux dispersions dues aux variations du coefficient de frottement et à l'imprécision des moyens de serrage.

3.4. Incertitude sur la valeur de la précontrainte installée F_0 (*preload*)

Lors du serrage initial, on trouve deux causes importantes d'erreur :

- ✓ L'incertitude sur les valeurs du coefficient de frottement f (tableau 6). Pour les pièces assemblées en acier, on peut utiliser les mêmes valeurs pour f_1 et f_2.
- ✓ L'incertitude sur le couple de serrage appliqué (tableau 7).

Ceci se traduit pour les moyens de serrage classiques par une dispersion importante sur la valeur installée de la précontrainte F_0 (la valeur installée correspond à la valeur qui existe réellement dans l'assemblage).

Tableau 6 – Coefficient de frottement f pour quelques modes de finition et de lubrification du couple vis/écrou				
Traitement de surface		Coefficient de frottement		
Vis	Écrou	Non huilé	Huilé	Graissé au MoS_2
phosphatée	néant	0,14 à 0,21	0,14 à 0,17	0,10 à 0,11
électrozinguée (8 µm)	néant	0,13 à 0,18	0,13 à 0,17	
électrozinguée (8 µm)	électrozingué (5 µm)	0,13 à 0,18	0,14 à 0,19	
cadmiée (7 µm)	néant	0,08 à 0,12	0,08 à 0,11	
cadmiée (7 µm)	cadmié (7 µm)	0,08 à 0,12	0,10 à 0,15	

Tableau 7 – Ordre de grandeur des dispersions de couple obtenues en fabrication avec des moyens de serrage traditionnels	
Moyen de serrage	Incertitude sur le couple
Clés dynamométriques dans les deux tiers supérieurs de l'échelle	± 10 %
Visseuses rotatives avec étalonnage	± 15 %
Clés à choc avec étalonnage spécifique et adaptation de rigidité	± 25 %
Clés à fourche ou clés à choc sans étalonnage spécifique (clés à main)	± 40 %

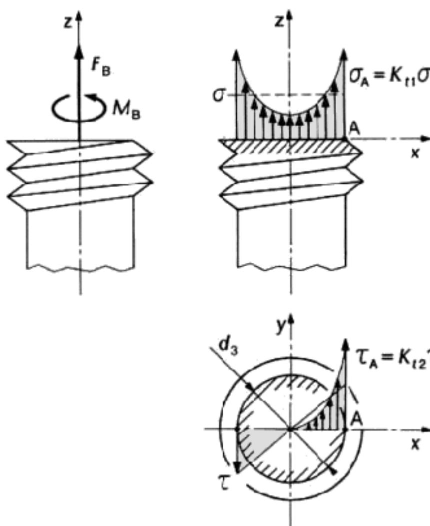
Exemple : pour une vis HM de diamètre 20 mm, phosphatée, huilée, serrée avec une clé dynamométrique réglée pour donner un couple moyen C_0 = 370 Nm, on obtient 76118 N < 111511 N. Soit une dispersion de ±19% autour de la valeur moyenne F_0.

Cet exemple montre bien que l'amélioration de la précision du serrage est un des problèmes fondamentaux de la mise en œuvre des assemblages boulonnés modernes.

4. TENUE STATIQUE D'UN BOULON

4.1. Etat de contrainte d'une vis

Dans le cas général de sollicitations axiales d'assemblages sans flexion, la vis est tendue par un effort F_B et tordue par un moment de torsion M_B équivalent aux deux premiers termes du couple de serrage : $M_B = C_1 = F_0 (0.16 P + 0.583 d_2 f_1)$



En un point A de la périphérie du noyau , on aura donc un état combiné de traction et de torsion :

$\sigma_A = K_{t1} \sigma$
avec K_{t1} coefficient de concentration de contrainte en traction
et $\sigma = 4 F_B / (\pi d_3^2)$ = effort de traction / section du noyau

$\tau_A = K_{t2} \tau$
avec K_{t2} coefficient de concentration de contrainte en torsion
et $\tau = 16 M_B / (\pi d_3^3)$ = contrainte de torsion dans le noyau

L'application du critère de Von Mises permet d'obtenir la valeur de contrainte normale équivalente σ_e :

$$\sigma_e = [(K_{t1} \sigma)^2 + 3 (K_{t2} \tau)^2]^{1/2}$$

σ_e peut être comparé :
soit à une fraction de la limite d'élasticité du matériau : $\sigma_e < R_e / \alpha_1$
soit à une fraction de la limite résistance à la traction du matériau : $\sigma_e < R_m / \alpha_2$

Dans le cas d'une sollicitation supplémentaire de flexion, la contrainte de flexion multipliée par son coefficient de concentration de contrainte viendra s'ajouter à la contrainte de traction. Le calcul de la contrainte équivalente resterait inchangé.

Ce calcul, bien que parfaitement correct pour la partie filetée située loin des zones d'application des charges, ne permet pas d'avoir une idée exacte de la résistance de la vis.

4.2. Causes d'imprécision du calcul

4.2.1. Influence des concentrations de contraintes

Tout d'abord, les coefficients K_t ne peuvent être estimés qu'avec une précision médiocre.
Ensuite, en statique, pour des pièces fortement entaillées comme les pièces filetés, écrire qu'on ne dépasse pas la limite élastique à fond d'entaille est une condition toujours bien trop restrictive. En fait, **les déformations plastiques locales mêmes importantes, ne compromettent pas la tenue globale de la pièce**. Les essais statiques réalisés sur éprouvette fortement entaillée montrent qu'il y a une augmentation importante de la résistance à la rupture par rapport à la détermination sur éprouvette lisse et à section de rupture identique (c'est le phénomène d'adaptation).
Nous verrons par la suite qu'il n'en est pas de même sous sollicitations dynamiques et que la présence d'un fort gradient de contrainte est très préjudiciable à la tenue en fatigue de la vis.

4.2.2. Influence de la répartition de la charge entre l'écrou et la vis

La rupture d'une vis au serrage ou en utilisation se produit pratiquement toujours au niveau du premier filet en prise (Figure 3).

Les autre cas de rupture constatés sont toujours dus à des anomalies de forme ou de type métallurgique qui auraient normalement dû entraîner l'élimination de l'élément fileté lors du contrôle de fabrication. C'est la conséquence de la répartition non uniforme de la charge entre les filets de l'écrou et de la vis.

Dans le cas d'un écrou normal, le premier filet supporte environ 30% de la charge totale (Figure 4). Il est donc soumis à un état de contraintes complexe qui dépend de nombreux paramètres.

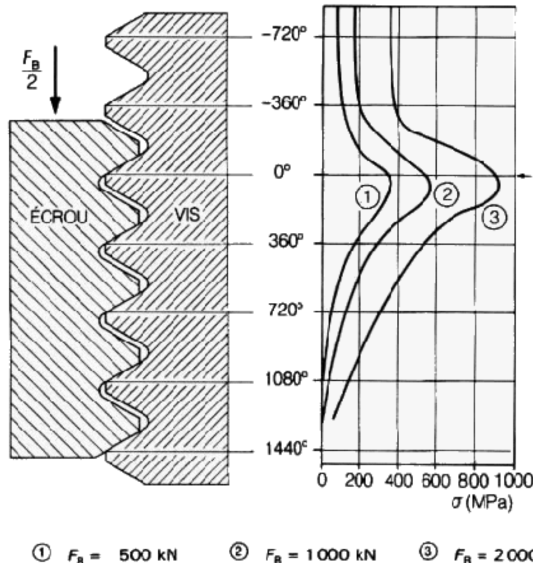


Figure 3 : Répartition de la charge entre les filets de la vis

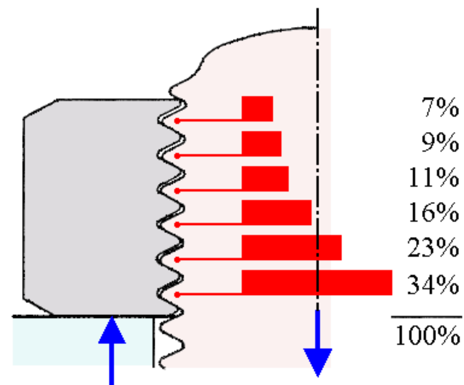


Figure 4 : Répartition de la charge entre les filets de l'écrou

L'exploitation de cette notion dépend du type d'étude réalisée :

- Pour les vis d'assemblages, nous avons vu précédemment que les fortes contraintes à fond de filet n'entraînaient pas forcément la détérioration de l'assemblage.
- Pour les pièces filetées de forme spéciale, il est bon de réaliser quelques essais de traction sur l'élément, la charge étant introduite par l'écrou pour avoir des valeurs de référence comparables à celles fournies par la norme pour la boulonnerie classique.
- Dans le cas du dimensionnement de vis de transformation de mouvement où l'on n'admet aucune déformation plastique, il faut tenir compte de la concentration de contrainte. On introduit alors un coefficient de majoration de la contrainte nominale compris entre 4 et 5 pour un filetage ISO à pas gros.

De plus, la répartition des efforts entre les filets est forcément influencée par le niveau d'introduction de la charge sur l'écrou. Ainsi, on obtiendra une diminution importante de la contrainte supportée pas les vis en utilisant des écrous suspendus ou des écrous de forme spéciale (Figure 5). On obtiendra alors également une forte amélioration de la tenue en fatigue de la vis en diminuant la valeur de la pointe de contrainte qui amorce la rupture.

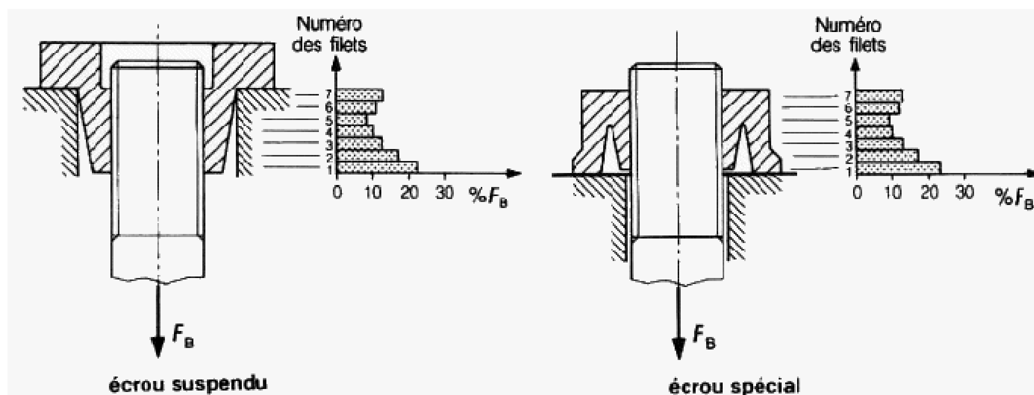


Figure 5 : Répartition de la charge entre les filets de divers écrous

4.3. Résistance des boulons sous charge statique

Compte tenu des remarques précédentes, il serait illusoire de réaliser un calcul prenant en compte tous les paramètres. **La vis sera considérée comme une tige cylindrique de section A_S,** les valeurs de contraintes de références (valeurs limites) seront

directement déduites d'essais de traction réalisés sur la vis équipée de son écrou. De cette manière, l'ensemble des défauts de forme et la non-homogénéité du matériau due au forgeage de la tige et au roulage des filets sont globalement pris en compte au cours de l'essai.

4.3.1. Traction axiale

Lorsqu'un boulon est soumis à un effort de traction axiale, l'effort maximal qu'il peut supporter sans se déformer notablement de façon permanente peut être calculé de la façon suivante :

$$\mathbf{F_{B\,max} = 0.9\, R_{e\,min}\, A_S}$$

Avec A_S section résistante de la tige de la vis

$R_{e\,min}$ limite élastique minimale de la classe de qualité considérée.

Exemple : pour un boulon de classe 8.8 avec d=12 mm et P = 1.75mm on a :
A_S = 84.3 mm (table 2) et $R_{e\,min}$ = 627 MPa (table 3) d'où $F_{B\,max}$ = 47570 N.

La valeur de $F_{B\,max}$ ainsi calculée est très proche de la charge d'épreuve (48500 N pour l'exemple), ce qui montre bien l'importance de cette notion.

4.3.2. Traction et torsion combinées

C'est le type de sollicitation à laquelle est soumis un boulon mis sous tension avec un serrage à la clé.
On calcule la contrainte équivalente, par l'application du critère de Von Mises, sur la vis modélisée par une tige cylindrique de section A_S, soumise à un effort normal T_B et à un moment de torsion M_B.
On obtient ainsi :

$$\sigma_e = [\, \sigma_B^2 + 3\, \tau_B^2 \,]^{1/2}$$

Avec $\sigma_B = F_B / A_S$ et $\tau_B = 16\, M_B / (\pi\, d_S^3)$ où d_S est le diamètre du cylindre de section A_S.

Comme précédemment, on peut dire que la contrainte normale équivalente maximale que peut supporter le boulon sans se déformer notablement est égale à $\sigma_{e\,max} = 0.9\, R_{e\,min}$.

Remarque : lorsque le boulon est seulement soumis à l'effort de serrage F_0 *et au moment de torsion induit par le couple de serrage (*$M_B = C_1$*), pour un coefficient de frottement moyen f de 0.13 et pour des vis à pas gros, on obtient :* $\sigma_e \approx 1.23\, \sigma_B$
Dans ce cas simple, on peut donc exploiter un dimensionnement approché rapide en écrivant :
$\sigma_B = F_0 / A_S \leq 0.73\, R_{e\,min}$
Cette approche est utile pour chercher à la fois le diamètre et le nombre de vis en fonction de l'effort total de serrage de l'assemblage.

4.3.3. Traction, torsion et flexion combinées

C'est le cas de pratiquement tous les assemblages car il est très rare que les efforts soient appliqués suivant l'axe des boulons. Le calcul est le même que précédemment mais, comme nous le verrons plus loin, il est souvent difficile d'évaluer le moment de flexion dans la tige.

Un essai a été mis au point pour s'assurer que la vis pourra subir ces sollicitations supplémentaires (courantes) sans abaissement important de ses performances. C'est **l'essai de traction avec cale biaise** défini par la norme NF E 27-00. Dans cet essai, la vis doit satisfaire aux exigences minimales de résistance à la rupture de sa classe de qualité, sa tête étant appuyée sur un plan incliné, ce qui introduit un fort moment de flexion dans la tige au voisinage de la tête et doit entraîner une importante déformation plastique.

Nous pensons que cet essai, bien que très contraignant pour la boulonnerie, ne simule pas bien l'introduction d'un moment de flexion dans la tige dû, comme c'est souvent le cas, à une importante déformation des pièces et qu'il serait dans certains cas dangereux de s'en contenter.

Une contrainte de flexion supplémentaire diminuera toujours la tenue d'un boulon et on devra l'éviter, dans la mesure du possible, par un dessin judicieux des pièces.

5. TENUE DYNAMIQUE D'UN BOULON

Cette caractéristique fondamentale pour le dimensionnement de la plupart des assemblages boulonnés de construction mécanique a fait l'objet d'un certain nombre d'essais pour les vis roulées à froid et traitées thermiquement.

Les conditions d'essais sont définies dans la norme NF E 27-009 relative aux essais de fatigue sous charge axiale. Toutefois, aucune spécification minimale de contrainte admissible n'est imposée, et pour les calculs de vérification, on doit se contenter des résultats d'essais publiés ou des valeurs recommandées par VDI.

Pour un nombre de cycles de sollicitations supérieur à 10^6, ces données semblent suffisantes, pour un nombre de cycles inférieur, on doit procéder à ses propres essais statistiques. Il est alors possible de tracer, à partir des courbes d'iso probabilité

de Wöhler (Figure 6) un diagramme de Haigh probabilisé définissant, pour un nombre de cycles donné, le domaine de tenue dynamique des boulons considérés.

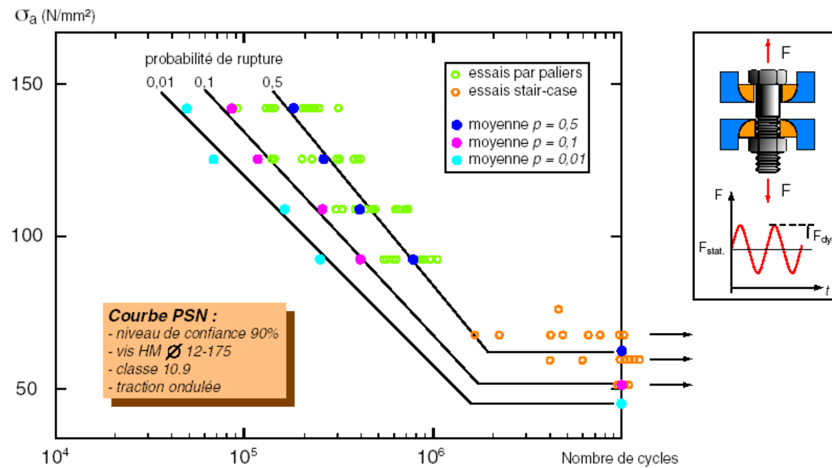


Figure 6 : Exemples de courbes d'iso probabilité de Wöhler (σ_m = 0.7 $R_{e\ min}$ de la classe de qualité)

Dans le domaine de contraintes moyennes qui intéresse les assemblages préserrés σ_m = 0.5 à 0.8 $R_{e\ min}$ de la classe de qualité), on peut constater que la contrainte alternée admissible σ_a :

- ✓ dépend peu de la contrainte moyenne. En effet, la Figure 7 met en évidence qu'une variation de 100 MPa de σ_m, entraîne seulement une variation de 5 MPa de σ_a.
- ✓ est pratiquement indépendante de la classe de qualité. En pratique, pour les boulons de classe de qualité 8.8, 10.9, 12.9 roulés à froid et traités thermiquement, une amplitude de contrainte dynamique de 50 MPa peut être considérée comme une valeur limite, en première approximation.
- ✓ varie de façon sensible avec le diamètre des vis.

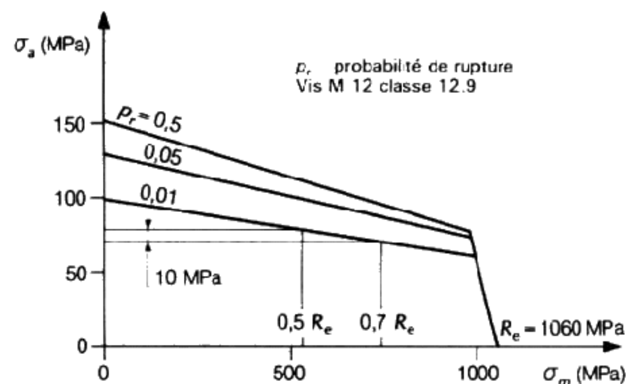


Figure 7 : Diagramme de Haigh probabilisé ($n_c > 10^6$)

On pourra, pour un nombre de cycles supérieur à 3.10^6 et pour les classes de qualité 8.8, 10.9, 12.9 adopter les valeurs du Tableau 8. La faible valeur de tenue en dynamique et la relative insensibilité à la charge statique sont dues à une plastification importante de la vis en fond de filet causée par la concentration de contrainte dans cette zone et la répartition non uniforme de la contrainte dans les filets vis-écrou en prise (30% sur le premier filet, Figure 8).

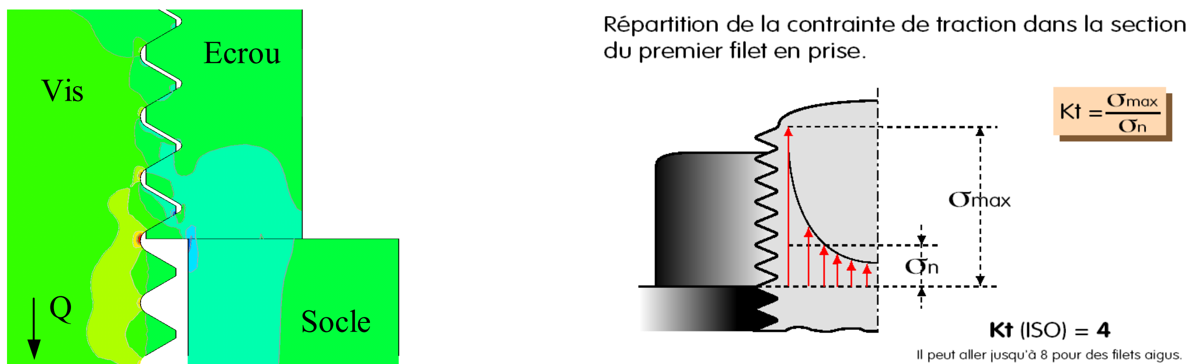


Figure 8 : Evolution de la contrainte normale dans les filets

Le Tableau 8 indique, pour plusieurs dimensions de boulons, les contraintes dynamiques admissibles (σ_a) pour une contrainte statique de 0.7 $R_{e\ min}$ de la classe de qualité. Les résultats obtenus, selon la documentation NF FDE 25-030, donnent des valeurs indépendantes de la classe de qualité et pour des conditions de limites d'endurance à 3.10^6 cycles. D'autres essais ont été réalisés par le CETIM. Ces essais ont été menés sur de la boulonnerie à base de Bore.

Tableau 8 - Limites d'endurance à 3.10^6 cycles				
Valeur mini (± MPa)		M4 à M8	M10 à M16	M18 à M30
FDE 25-030	Classe 8.8	60 MPa	50 MPa	40 MPa
	Classe 10.9			
	Classe 12.9			
Etude CETIM 105200	Classe 8.8	73 MPa	66 MPa	55 MPa
	Classe 10.9	60 MPa	53 MPa	40 MPa
	Classe 12.9	54 MPa	49 MPa	40 MPa

Remarques

La meilleure tenue est obtenue avec des vis de classe 8.8. Les classes 10.9 et 12.9 ont des tenues très voisines, au bénéfice toutefois de la première. La limite de fatigue de la vis (σ_D) diminue lorsque son diamètre augmente (effet d'échelle).
La limite de fatigue diminue lorsque la classe de qualité augmente (effet de sensibilité à l'entaille).

Les valeurs proposées par FDE 25-030 correspondent assez bien aux valeurs trouvées expérimentalement pour les classes 10.9 et 12.9. Par contre les valeurs relevées pour la classe 8.8 sont supérieures de 15 MPa à celles proposées par FDE 25-030. On en déduit que la visserie au bore testée a une tenue en fatigue supérieure ou au moins égale à celle de la visserie standard (étude FDE 25-030).

La tenue en fatigue peut être modifiée par la nature de l'écrou adjoint à la vis, la diminution du jeu vis-écrou augmente la tenue en fatigue.

6. CONCLUSION SUR LA TENUE DYNAMIQUE DES BOULONS

Dans les assemblages boulonnés soumis à des sollicitations de fatigue, les contraintes alternées admissibles sont très faibles par rapport aux contraintes statiques et très faibles aussi par rapport aux contraintes dynamiques des pièces lisses ayant le même diamètre que le boulon et le même matériau (Figure 9).

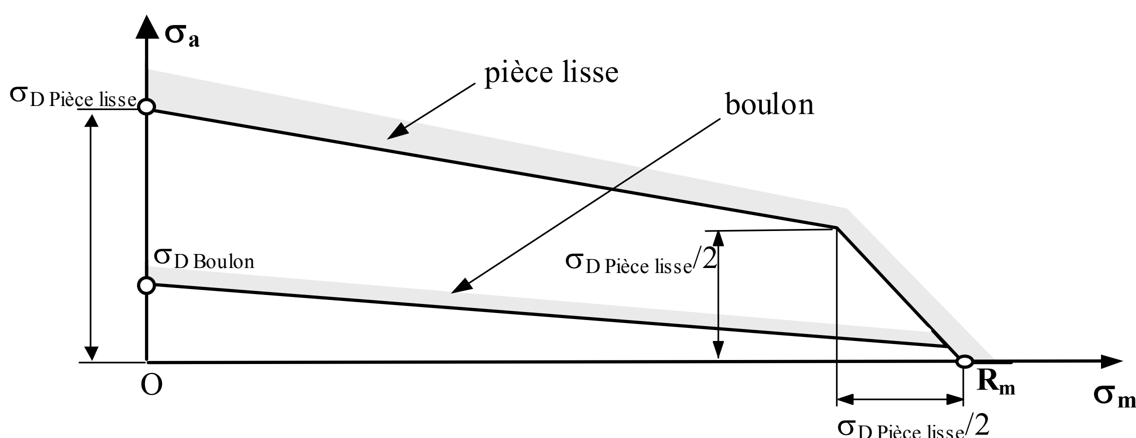


Figure 9 : Droite de Goodman du boulon

Il est donc nécessaire, pour les assemblages boulonnés travaillant en fatigue, de disposer de modèles de calcul permettant, avec une bonne précision, d'évaluer les contraintes alternées induites dans la vis.

B. CHARGEMENT AXIAL D'INTENSITE VARIABLE

Nous nous intéressons aux assemblages fortement sollicités en fatigue, qui sont les dispositifs de liaison des pièces essentielles d'un mécanisme ou d'une structure. Ceux-ci sont réalisés par des vis ou des boulons HR (Haute Résistance) qui ont la particularité d'admettre des valeurs de résistance à la rupture très élevée (Rm > 1000MPa), alors que leur résistance en fatigue est très faible ($\sigma_a \approx 50$ MPa). Ceci implique d'utiliser des modèles de calcul suffisamment précis pour évaluer avec une bonne précision la contrainte alternée dans la vis, lorsque les assemblages sont soumis à des efforts extérieurs d'intensité variable.

Lorsque les chargements sont axiaux ou très faiblement excentrés, le modèle linéaire développé dans les règles VDI 2230 donne des résultats satisfaisants. Toutefois, il implique la connaissance précise de la rigidité du boulon et des pièces ce qui n'est pas toujours facile à obtenir ou à définir avec justesse. Ces paramètres, associés à la précharge de serrage, permettent de diminuer fortement la valeur de la contrainte alternée et d'assurer, ainsi, une très bonne sécurité en fatigue.

Une partie des travaux de recherche du Laboratoire de Génie Mécanique de Toulouse (LGMT), est lié à la connaissance précise des raideurs d'un assemblage boulonné. Ils concernent la modélisation en « éléments finis » du boulon et la recherche d'éléments équivalents permettant de modéliser convenablement son comportement avec un moindre coup de calcul. Ces travaux aboutissent au développement d'outils industriels d'aide au calcul des assemblages boulonnés.

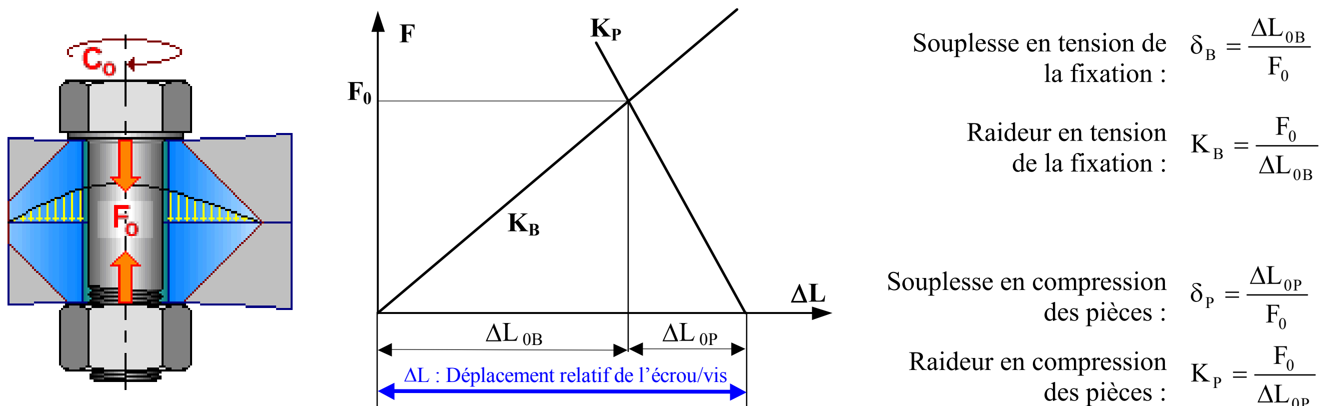
1. CALCULS PRELEMINAIRES

Nous nous proposons d'étudier le comportement d'un assemblage composé de deux pièces serrées par l'intermédiaire d'une fixation (ex : boulon). Les sollicitations extérieures sont réduites à un effort axial (Fa) constant ou variable en fonction du temps.

1.1. Précontrainte F_0

Lors d'un assemblage par boulon précontraint et pour une déformation élastique suivant la loi de Hook, l'existence de la précharge F_0 conduit la fixation à s'allonger d'une quantité ΔL_{0B} et l'assemblage de pièces à se raccourcir de ΔL_{0P} (Figure 10).

On définit ainsi la souplesse (ou flexibilité) élastique δ, l'aptitude d'un élément à se déformer élastiquement sous l'action d'une force. On définit, aussi, la raideur K d'un élément comme étant l'inverse de la souplesse ($K = 1/\delta$). Dans le cas de l'assemblage étudié et pour un présserrage F_0 ces termes valent :



Souplesse en tension de la fixation : $\delta_B = \dfrac{\Delta L_{0B}}{F_0}$

Raideur en tension de la fixation : $K_B = \dfrac{F_0}{\Delta L_{0B}}$

Souplesse en compression des pièces : $\delta_P = \dfrac{\Delta L_{0P}}{F_0}$

Raideur en compression des pièces : $K_P = \dfrac{F_0}{\Delta L_{0P}}$

Figure 10 : Précontrainte d'un assemblage

1.2. Détermination de la souplesse des éléments (*stiffness*)

La maîtrise des rigidités des différents éléments composant un assemblage boulonné est essentielle pour conduire une étude de dimensionnement efficace de celui-ci. En effet, ces grandeurs caractérisent le comportement sous charge de ces liaisons, c'est à dire les déplacements mesurés sur l'axe du boulon en fonction des efforts extérieurs appliqués.

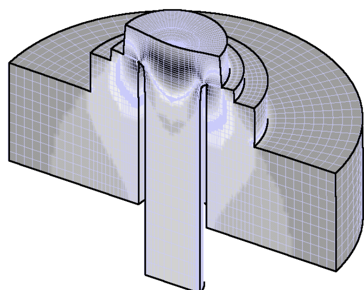
La connaissance précise des valeurs des souplesses équivalentes de la vis, de l'écrou et des pièces assemblées se justifie dans au moins trois cas classiques de calcul :

- le dimensionnement en fatigue d'un assemblage boulonné avec la détermination des contraintes alternées,
- la modélisation du serrage à l'angle et du serrage par tendeur hydraulique,
- le calcul des assemblages boulonnés soumis à des contraintes thermiques.

Il convient de définir des expressions pour les souplesses δ_B et δ_P qui tiennent compte de la géométrie de l'assemblage. Les calculs industriels sont généralement réalisés à partir des modèles proposés par la recommandation VDI 2230 (2003). Le développement des éléments finis a permis de réaliser des travaux de modélisation plus précis (Travaux du LGMT).

L'allure de la répartition des contraintes au sein de l'assemblage met en évidence les zones de compression des pièces et les fortes concentrations au voisinage de la tête de la vis. La zone comprimée des pièces est relativement limitée et est souvent comprise dans une plage angulaire de $30° < \varphi < 45°$ (encore appelé cône de Rötscher).

Cependant, sur l'exemple de la Figure 11, si les pièces sont massives (pièce 2), on remarque que l'étendue de la zone de compression se stabilise et qu'une augmentation de l'épaisseur a peu d'influence sur la surface de contact S_P.



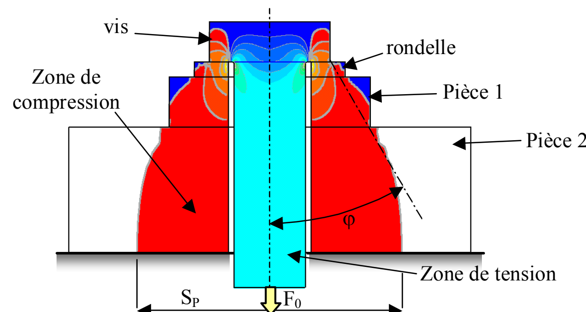


Figure 11 : Précontrainte d'un assemblage

1.3. Souplesse en tension de la fixation

Le calcul de la souplesse δ_B de la fixation représentée sur la Figure 12, qui assemble des pièces de longueur totale L_P, est prise égale à celle d'un modèle équivalent considéré comme soumis à un effort de tension F_0 uniforme. Ce modèle prend en compte l'influence de la rigidité de la tête de la vis et de la liaison filetée vis-écrou, pour notre exemple. On introduit deux longueurs équivalentes supplémentaires en fonction du diamètre nominal d et qui dépendent de coefficients associés aux types de fixation (vis-écrou, pièce taraudée).

Le modèle global correspond à la somme de quatre souplesses :

① : souplesse de la tête ;
② : souplesse des tronçons lisses ;
③ : souplesse de la partie filetée non en prise ;
④ : souplesse de la partie des filets en prise de la vis et de la pièce taraudée.

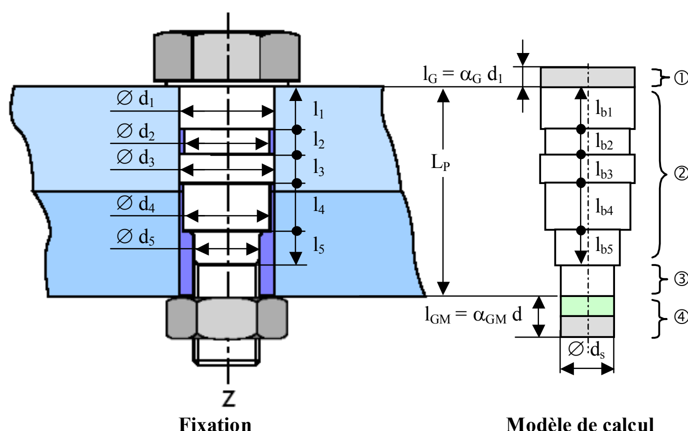


Figure 12 : Modèle de calcul de la souplesse de la fixation

Modèle de calcul de δ_B :

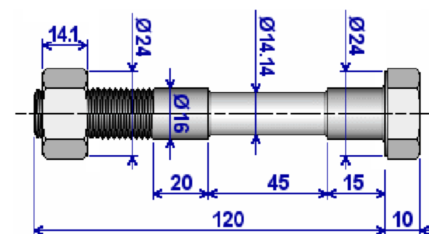
$$\delta_B = \frac{1}{K_B} = \frac{1}{E_B}\left[\frac{\alpha_G . d_1}{A_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{l_{bi}}{A_i} + \frac{L_P - \sum_{i=1}^{n} l_{bi}}{A_s} + \frac{\alpha_{GM} . d}{A_s}\right] \quad (1)$$

d : diamètre nominal
E_B :module d'élasticité
A_i : section réduite associée à d_i
A_s : section résistante associée à d_s
L_P : Hauteur totale de pièces serrées

	Tête de vis	Vis-écrou	Pièce taraudée
α_G	≈ 0,47		
α_{GM}		≈ 1,1	≈ 0,8

Exemple :

Calcul de la raideur du boulon acier haute résistance HM dont le diamètre nominal vaut d = 16, de longueur sous tête L_B = 120 mm avec une partie filetée de 40 mm, et qui vient serrer un ensemble de pièces dont la hauteur totale est L_P = 85 mm.



$$\delta_B = \frac{1}{K_B} = \frac{4}{205000.\pi}\left[\frac{0,47.16}{16^2} + \frac{15}{16^2} + \frac{45}{14,14^2} + \frac{20}{16^2} + \frac{[85-(15+45+20)]+[1,1.16]}{\left(\frac{14,701+13,546}{2}\right)^2}\right]$$

$K_B = 1/\delta_B$ = 319166,2 N/mm.

Désignation : H M16-120/40-10.9

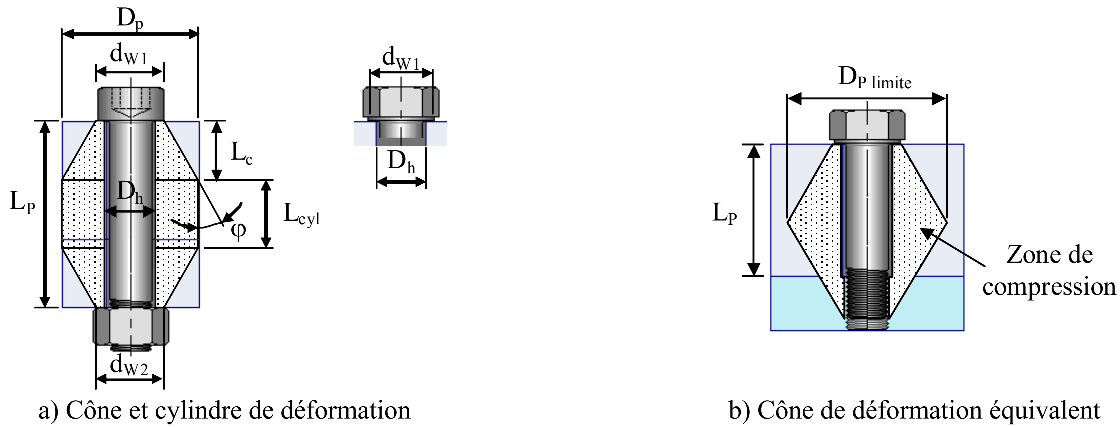
1.4. Souplesse en compression de la pièce

Le calcul de la souplesse en compression δ_P des pièces est déduit d'une modélisation du champ de contrainte. La plupart des modèles de calcul se ramènent à un chargement axisymétrique de l'assemblage boulonné avec des pièces cylindriques de section circulaire.

1.4.1. Modèle VDI 2230 (2003)

Le document VDI 2230 (partie 1), d'origine allemande, est une référence internationale reconnue dans le domaine du calcul et de la conception des assemblages vissés. Il est à l'origine de nombreux documents techniques et normatifs (FDE 25030, ESA

PSS 03-208, PSA B18 3530 et B13 3120, …). Ce document VDI 2230 est mis à jour régulièrement et la dernière version de février 2003 comporte des évolutions majeures. Pour des assemblages qui dans la pratique ne sont pas cylindriques (brides rectangulaires, structures assemblées par plusieurs boulons), il n'existe toujours pas de mode de calcul analytique de la souplesse. Dans la VDI, ces géométries sont approchées par un cylindre équivalent.



a) Cône et cylindre de déformation b) Cône de déformation équivalent

Figure 13 : Modèle assemblage VDI pour boulons et vis

Remarques

Les assemblage par vis qui ont une dimension à l'interface peu différente de la dimension de contact sous tête d_W ($D_{P\ \text{pièce taraudée}} \leq 1{,}4.d_w$), et qui ont des dimensions du corps fondamental plus grandes que la zone de compression, doivent être considérés comme des assemblages avec boulons.

La méthode VDI s'appuie sur le calcul de l'angle φ du cône déduit de simulations en éléments finis, lequel est exprimé en fonction des paramètres adimensionnels L^*_P et D^*_P.

Pour un assemblage par boulon :

$\tan\varphi = 0{,}362 + 0{,}032 \ln(L_P^*/2) + 0{,}153 \ln D_P^*$

Avec $L_P^* = \dfrac{L_P}{d_W}$ $D_P^* = \dfrac{D_P}{d_W}$ et $d_W = \dfrac{d_{w1} + d_{W2}}{2}$

Pour un assemblage par vis :

$\tan\varphi = 0{,}348 + 0{,}013 \ln L_P^* + 0{,}193 \ln D_P^*$

Une autre donnée de base de cette modélisation est la limitation de la dimension de la base du cône $D^*_{P\ \text{limite}}$. Pour ce calcul on intègre un paramètre w pour distinguer les deux types d'assemblage :

w = 1 : assemblages par boulon

w = 2 : assemblages par vis

$D_{P\ \text{limite}} = d_W + w \cdot L_P \cdot \tan\varphi$

Pour $D_P \geq D_{P\ \text{limite}}$

On va se trouver dans la situation décrite (Figure 13b), la zone de compression étant constituée de deux cônes équivalents. On a alors :

$$\delta_P = \frac{1}{K_P} = \frac{2 \cdot \ln\left[\dfrac{(d_W + D_h)\cdot(d_W + w\cdot L_P \cdot \tan\varphi - D_h)}{(d_W - D_h)\cdot(d_W + w\cdot L_P\cdot\tan\varphi + D_h)}\right]}{w\cdot E_P\cdot\pi\cdot D_h\cdot\tan\varphi} \quad (2)$$

Pour $d_W < D_P < D_{P\ \text{limite}}$

La zone de compression équivalente est constituée de cône(s) et de cylindre (Figure 13a et Figure 13c) :

$$\delta_P = \frac{1}{K_P} = \frac{\dfrac{2}{w\cdot D_h\cdot\tan\varphi}\cdot\ln\left[\dfrac{(d_W + D_h)\cdot(D_p - D_h)}{(d_W - D_h)\cdot(D_p + D_h)}\right]}{E_P\cdot\pi} + \frac{\dfrac{4}{d_W^2 - D_h^2}\cdot\left[L_p - \dfrac{(D_P - d_W)}{w\cdot\tan\varphi}\right]}{E_P\cdot\pi} \quad (3)$$

Généralisation de la méthode

Lorsque l'on a des matériaux différents pour les pièces, on doit calculer séparément les souplesses des différentes parties (coniques et cylindriques). Alors, on peut calculer la souplesse du tronc de cône δ_{Pc} l'expression (4) :

$$\delta_{Pc} = \frac{1}{K_{Pc}} = \frac{\ln\left[\dfrac{(d_W + D_h)\cdot(d_W + 2\cdot L_c\cdot\tan\varphi - D_h)}{(d_W - D_h)\cdot(d_W + 2\cdot L_c\cdot\tan\varphi + D_h)}\right]}{w\cdot E_P\cdot\pi\cdot D_h\cdot\tan\varphi} \quad (4)$$

Avec la longueur du tronc de cône L_c telle que définie sur la Figure 13a :

$$L_c = \frac{(D_P - d_{Wi})}{2\tan\varphi} < \frac{w\, L_P}{2} \quad (5)$$

Ce qui donne pour la longueur de la partie cylindrique :

$$L_{cyl} = L_P - \frac{2\, L_c}{w} \quad (6)$$

Et pour la souplesse de la partie cylindrique :

$$\delta_{Pcyl} = \frac{4\, L_{cyl}}{E_P \pi (D_P^2 - D_h^2)} \quad (7)$$

La souplesse totale de la pièce vaut alors :

$$\delta_P = \frac{2}{w}\delta_{Pc} + \delta_{Pcyl} \quad (8)$$

Dans le cas où les pièces assemblées sont en matériaux différents, il faut décomposer les parties de même module d'élasticité en parties cylindriques et coniques. La somme des longueurs des différentes parties L_i constitue la longueur de serrage L_P :

$$L_P = \Sigma\, L_i \quad (9)$$

A partir de la tête de vis ou de l'écrou, le grand diamètre de la précédente (i - 1) correspond au diamètre d'appui d_W de la partie considérée (i) :

$$d_{Wi} = d_W + 2\tan\varphi \sum_{i=1}^{i} L_{i-1} \quad (10)$$

La souplesse de l'assemblage est alors la somme des souplesses des différents éléments :

$$\delta_P = \Sigma\, \delta_{Pi} \quad (11)$$

Remarques sur la formulation VDI 2230

Son principal avantage est de donner une expression pouvant être appliquée à de nombreux cas de figures, dans le cas d'un chargement symétrique, et notamment aux empilages de pièces.

On peut identifier quelques inconvénients :

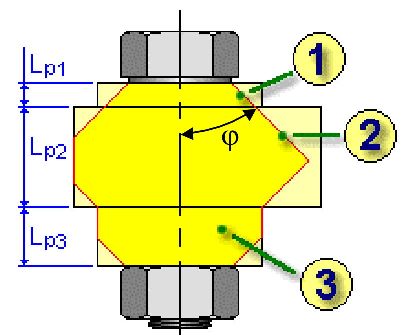
- le résultat s'appuie sur l'hypothèse d'une répartition uniforme des contraintes sur la surface élémentaire. La forme de la répartition est, elle aussi, supposée connue avec une proportionnalité entre le diamètre extérieur de la zone et l'épaisseur de la pièce. Nous nous éloignons de cette hypothèse dès que nous considérons des épaisseurs de pièces relativement faibles ainsi que des jeux radiaux importants.
- le calcul dépend de l'angle φ de la zone tronconique. La détermination de cet angle reste délicate car elle est basée sur une allure de répartition de contraintes axiales uniforme, ce qui n'est pas toujours le cas dans la réalité.
- le calcul ne prend pas en compte les effets de bords qui apparaissent au voisinage de la tête de la vis (sensibles en particulier pour des épaisseurs de pièces faibles).
- enfin, le problème des vis dans un trou taraudé est abordé très simplement et mériterait une étude complémentaire.

Néanmoins cette nouvelle proposition VDI nous parait intéressante et donne de bons résultats pour du pré-dimensionnement. Elle est facile à pratiquer en calcul manuel, par l'utilisation d'un tableur ou par un programme.

Exemple

Soit l'assemblage de trois pièces cylindriques suivantes :

Pièce 1	**Pièce 2**	**Pièce 3**
D_{P1} = 25 mm	D_{P2} = 72 mm	D_{P3} = 25 mm
L_{P1} = 2 mm	L_{P2} = 25 mm	L_{P3} = 20 mm
E_{P1} = 205000 MPa	h = 20 mm	E_{P3} = 205000 MPa
	E_{P2} = 205000 MPa	

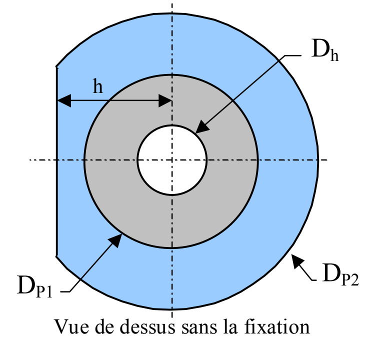


La liaison est assurée par une vis HM12 (diamètre sous tête $d_{W2} \approx d_{W1}$ = 19 mm) et est implantée dans un trou de passage de D_h = 12,5 mm (E_{vis} = 205000 MPa).

***Calcul de l'angle φ du cône de compression** (assemblage par boulon : **w = 1**)*

L^*_P	D^*_P	φ
$(L_{P1} + L_{P2} + L_{P3})/d_W = 2{,}47$	$D_{P2}/d_W = 3{,}79$	φ = 29,80° (tan φ = 0,573)

On choisit $D_P = D_{P2}$ car, compte tenue des dimensions des pièces, c'est la pièce 2 qui va influer sur la répartition des contraintes de compression.



Calcul de D_P limite

$D_{P1\ limite} = d_W + w.\ L_{P1}\ .\ \tan\varphi$ — $D_{P1} > D_{P1\ limite} = 20{,}15$ mm

$D_{P3\ limite} = d_W + w.\ L_{P3}\ .\ \tan\varphi$ — $d_W < D_{P3} < D_{P3\ limite} = 30{,}45$ mm

$D_{P2\ limite} \approx (D_{P1_eff} + D_{P3_eff} + w.\ L_{P2}\ .\ \tan\varphi)/2$ — $D_{P2} > D_{P2\ limite} = 29{,}73$ mm

avec : $D_{Pi_eff} = \mathrm{Min}(D_{Pi}\ ;\ D_{Pi\ limite})$

On constate qu'il existe une continuité du cône de compression entre les pièces 1 et 2 ($D_{P1} > D_{P1\ limite}$). Comme ces deux pièces ont le même matériau, on peut simplifier l'étude en considérant qu'une seule pièce de longueur équivalente $L_{P1\text{-}2} = L_{P1} + L_{P2}$.

Calcul de $\delta_{P\ VDI}$

Pièce 1-2	Pièce 3 cyl	Pièce 3 cône	Assemblage
$\delta_{P1\text{-}2\ VDI} = 3{,}55\ 10^{-7}$ mm/N	$\delta_{P3\ cyl\ VDI} = 1{,}26\ 10^{-7}$ mm/N	$\delta_{P3\ c\ VDI} = 2{,}08\ 10^{-7}$ mm/N	$\delta_{P\ VDI} = \delta_{P1\text{-}2\ VDI} + \delta_{P3\ cyl\ VDI} + \delta_{P3\ c\ VDI}$ **$\delta_{P\ VDI} = 6{,}89\ 10^{-7}$ mm/N**

1.4.2. Modèle de Rasmussen modifié (Institut Clément Ader)

Grâce à l'exploitation de méthodes numériques, comme les éléments finis, il est possible d'obtenir avec une très bonne précision le calcul de la souplesse des pièces serrées (ainsi que de la fixation). Cependant, il n'est pas toujours possible (et/ou utile) d'utiliser systématiquement ce type d'outil pour déterminer les souplesses. On trouve dans la littérature des travaux, basés sur des calculs par éléments finis, permettant de déterminer les souplesses des pièces assemblées exprimées en fonction de quantités adimensionnelles.

Rasmussen propose une formulation de la rigidité des pièces assemblées uniquement par un boulon.

Les géométries servant de base à la modélisation sont celles de la Figure 16.

Le nombre important de variables nécessaires pour décrire la structure ont conduit RASMUSSEN à rendre adimensionnel l'ensemble des paramètres.

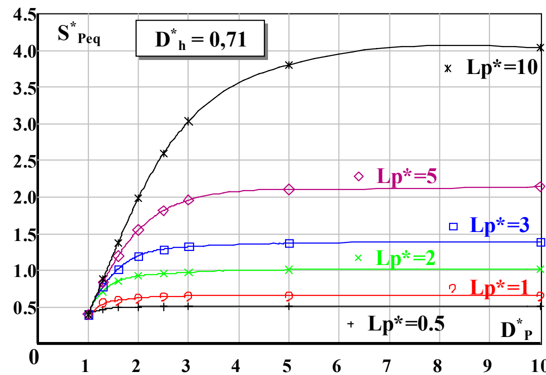


Figure 14 : Section équivalente réduite S^*_{Peq}

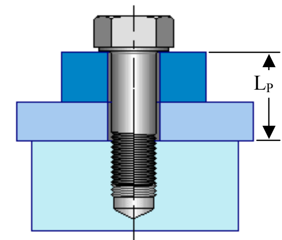


Figure 15 : cas trou borgne

Le choix du paramètre adimensionnel s'est porté sur d_W. En effet, c'est le diamètre d'appui de la tête du boulon qui va conditionner l'étendue de la zone comprimée des pièces, et donc influencer le comportement de la liaison. Ces paramètres adimensionnels sont :

$$S^*_P = S_{Peq}/d_W^2 \qquad D^*_P = D_P/d_W \qquad L^*_P = L_P/d_W \qquad D^*_h = D_h/d_W$$

Les courbes de la Figure 14 illustrent les résultats obtenus par éléments finis pour $D^*_h = 0{,}71$ et pour un assemblage par un boulon. Ces courbes sont tracées pour des hauteurs de pièces L^*_P variables.

Le diamètre extérieur des pièces assemblées est un paramètre qui influe fortement sur la raideur. On imagine aisément que, lorsque D_p devient grand, la valeur de la section équivalente tend vers une asymptote horizontale. C'est ce que l'on observe à partir des courbes de la Figure 14.

On peut également penser que, lorsque $D_p < d_W$, la rigidité des pièces assemblées correspond sensiblement à celle d'un tube de diamètre extérieur D_p et de diamètre intérieur D_h comprimé uniformément ; c'est-à-dire $S_{Peq} = S_{réelle}$. La Figure 16 illustre ces deux remarques.

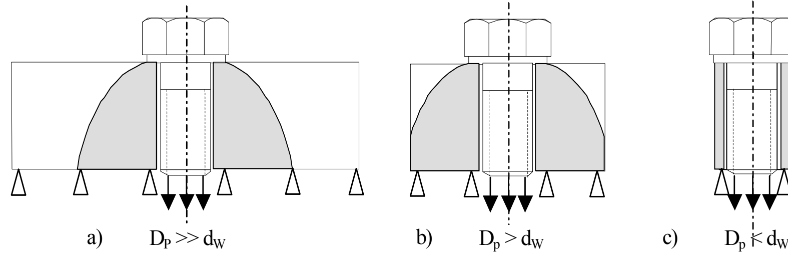


Figure 16 : Allure de la zone comprimée dans les pièces assemblées

1.4.2.1. Expressions de la section adimensionnelle réduite S^*_P

A partir des travaux de RASMUSSEN, il est proposé les formules analytiques suivantes, englobant tous les résultats éléments finis. L'erreur maximum est de 5 % pour la majorité des cas en comparaison avec les résultats donnés par les éléments finis.

Cas d'un assemblage avec un boulon et pour un coefficient d'adhérence de l'ordre de $f \approx 0,2$:

- Si $L_P^* \leq 0,5$:

$$S^*_{P\,boulon} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - D_h^{*2}\right)\tan^{-1}\left[50\cdot L_p^* - 5\right] + \frac{1}{2}\cdot\left(D_P^{*2} - 1\right)\cdot\tan^{-1}\left[\frac{0,8\cdot(L_p^* - 0,2)}{(D_p^{*2} - D_h^{*2})}\right] \tag{12}$$

- Si $L_P^* > 0,5$:

$$S^*_{P\,boulon} = \frac{\pi}{4}\cdot(1 - D_h^{*2}) + \frac{1}{2}\cdot(D_P^{*2} - 1)\cdot\tan^{-1}\left[\frac{0,8\cdot(L_p^* - 0,2)}{(D_P^{*2} - D_h^{*2})}\right] \tag{13}$$

Cas d'un assemblage avec une vis (Figure 15) :

$$S^*_{P\,vis} = \left\{\frac{1}{2}\cdot\left(1 - D_h^{*2}\right)\tan^{-1}\left[8,6\cdot(1,8\cdot L_p^*) - 5\right] + \frac{1}{2}\cdot\left(D_P^{*2} - 1\right)\cdot\tan^{-1}\left[\frac{0,8\cdot(1,8\cdot L_p^* - 0,2)}{(D_p^{*2} - D_h^{*2})}\right]\right\} \tag{14}$$

Remarques :

Les coefficients de l'expression $S^*_{P\,boulon}$ sont compatibles avec les configurations d'assemblage de la Figure 16.

Dans le cas d'un assemblage par une vis (Figure 15), l'expression $S^*_{P\,vis}$ a due être modifiée pour caler le calcul de la souplesse. Elle intègre l'influence des modules d'élasticité entre la pièce taraudée et la vis. Elle prend aussi en compte l'influence des frottements sous la tête de la vis et entre les filets (choix d'une valeur moyenne de $f \approx 0,2$).

1.4.2.2. Modélisation de la raideur des pièces prismatiques

Dans ce paragraphe, on étudie la raideur équivalente des pièces prismatiques. Actuellement, il n'existe pas de modèle fiable pour déterminer la raideur (ou la souplesse) axiale d'une pièce prismatique dans un cas général. D'autre part, les modèles issus de VDI ne prennent pas en compte la déformation en flexion de la tête quand le boulon n'est pas dans un axe de symétrie.

Les principaux paramètres influents sont la hauteur des pièces prismatiques assemblées L_p ainsi que le positionnement de la fixation repéré par les coordonnées X et Y (Figure 17). A partir d'une étude des paramètres adimensionnels (X^*, Y^*) de localisation de la vis, on observe, effectivement, une diminution de la raideur lorsque l'excentration augmente.

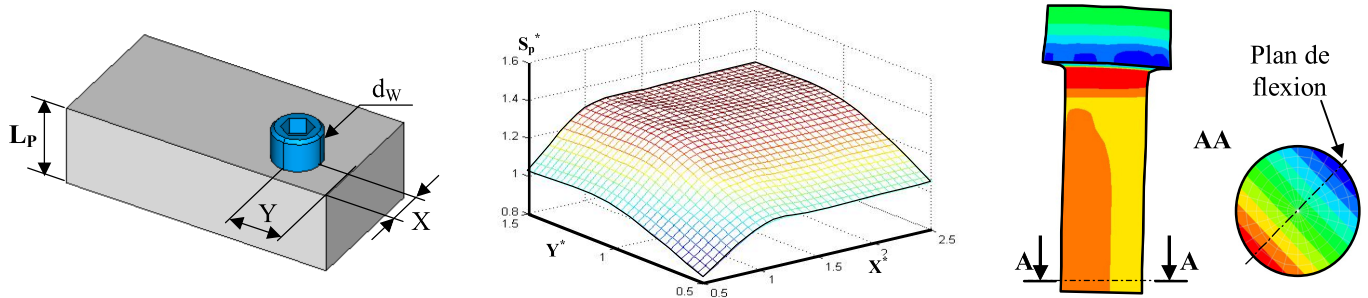


Figure 17 : Influence de l'excentration de la vis

Nous proposons alors une formulation permettant de nous ramener au cas symétrique, à partir d'un diamètre équivalent $D^*_{p_eq}$ défini en fonction de l'excentration du boulon (X^*, Y^*). Elle permet d'obtenir la raideur axiale équivalente à celle d'une pièce cylindrique, avec une très bonne précision. Elle présente l'avantage d'être applicable à une pièce de forme quelconque.

$$D^*_{P_éq} = \frac{9 \cdot \mathrm{Min}(X^*, Y^*) + 2 \cdot \mathrm{Min}[\mathrm{Max}(X^*, Y^*)\ ;\ 1]}{4} \tag{15}$$

$X^* = X/d_W$: abscisse réduite du trou de la pièce assemblée.
$Y^* = Y/d_W$: ordonnée réduite du trou de la pièce assemblée.

Pour le cas d'un assemblage boulonné, nous adoptons l'expression initiale en remplaçant D^*_P par $D^*_{P_eq}$.

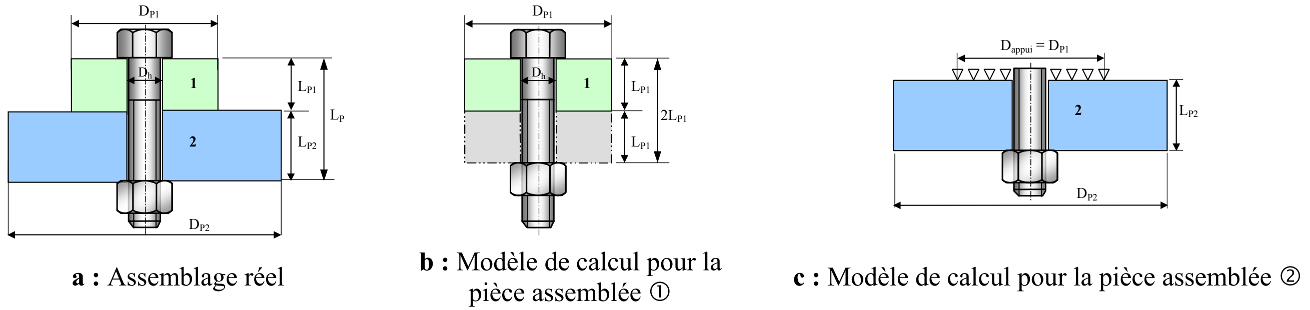
$$S^*_{P_eq} = \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - D_h^{*2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(D^{*\,2}_{P_éq} - 1\right) \cdot \tan^{-1}\left[\frac{0{,}8 \cdot (L^*_P - 0{,}2)}{(D^{*\,2}_{P_éq} - D_h^{*2})}\right] \tag{16}$$

Remarques :
L'expression $S^*_{P_eq}$ tient compte de la valeur extrême déterminée dans le cas où le boulon est complètement excentré sur la pièce ($X^* = 0{,}5$ et $Y^* = 0{,}5$). La valeur obtenue est $D^*_{P_eq} = 1{,}375$.

Elle permet également de traiter les cas intermédiaires notamment lorsque le boulon est fortement excentré sur un des bords de la pièce ($X^* = 0{,}5$) et loin de l'autre bord ($Y^* > 1{,}5$).

Au-delà d'une valeur de X et Y = 1,5 d_W, la fixation ne subit plus de flexion relative à l'excentration. Le diamètre extérieur de la pièce assemblée n'a pratiquement plus d'influence sur la raideur. On retrouve le cas de la pièce de révolution avec un chargement symétrique.

1.4.2.3. Cas de l'empilage de deux pièces cylindriques
La détermination de la raideur d'un empilage de pièces est un problème complexe. Le modèle schématisé Figure 18 propose de dissocier le calcul de la souplesse des pièces ① et ② de diamètres différents et de matériaux différents. Dans un premier temps, on détermine la souplesse de la pièce comportant le D_P le plus petit (dans notre exemple il s'agit de D_{P1}). Dans un deuxième temps, on calcule une souplesse moyenne de la pièce ② issue d'une souplesse moyenne en fonction du diamètre d'appui.



a : Assemblage réel | **b :** Modèle de calcul pour la pièce assemblée ① | **c :** Modèle de calcul pour la pièce assemblée ②

Figure 18 : Modèle de calcul pour un empilement de deux pièces

Etape 1 : Calcul de la section équivalente réduite de la pièce ①
Le calcul de la section équivalente de la pièce ① (S^*_{Peq1}), est similaire au calcul d'une pièce de même diamètre et de hauteur $L_{P1T} = 2L_{p1}$ (Figure 18b). On peut donc la calculer en remplaçant L^*_{P1} par $2L^*_{P1}$ dans la formule proposée pour le calcul de la section équivalente des pièces cylindriques de révolution. Dans cette configuration, la section adimensionnelle réduite pour la pièce ① vaut :

Fixation par Boulon :

$$S^*_{P1\,boulon} = \frac{\pi}{4} \cdot (1 - D_h^{*2}) + \frac{1}{2} \cdot (D^{*\,2}_{P1} - 1) \cdot \tan^{-1}\left[\frac{0{,}8 \cdot (2L^*_{P1} - 0{,}2)}{(D^{*\,2}_{P1} - D_h^{*2})}\right] \tag{17}$$

Fixation par vis :

$$S^*_{P1\,vis} = \left\{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - D_h^{*2}\right)\tan^{-1}\left[8{,}6 \cdot (1{,}8 \cdot 2L^*_p) - 5\right] + \frac{1}{2} \cdot \left(D_P^{*2} - 1\right) \cdot \tan^{-1}\left[\frac{0{,}8 \cdot (1{,}8 \cdot 2L^*_p - 0{,}2)}{(D_p^{*2} - D_h^{*2})}\right]\right\} \tag{18}$$

Etape 2 : Calcul de la section équivalente réduite de la pièce ②
Le calcul de la souplesse de la pièce ② est plus compliquée, car jusqu'à présent, il n'existe aucun modèle de calcul qui prend en compte le problème de la souplesse d'une pièce appuyée sur un diamètre D_{appui} différent du diamètre de la pièce ② D_{P2}.

On propose une formulation du calcul de la section équivalente réduite issue d'un plan d'expériences. Elle consiste à remplacer dans l'équation précédente le diamètre extérieur de la pièce ② D^*_{P2} par $1{,}4.D^*_{appui}$. On remplace également L^*_{P1} par $2L^*_{P1}$ dans la formule proposée pour le calcul de la section équivalente des pièces cylindriques de révolution.

Fixation par Boulon :

$$S^*_{P2\,boulon} = \frac{\pi}{4}\cdot(1-D_h^{*2}) + \frac{1}{2}\cdot([1{,}4.D^*_{appui}]^2 - 1)\cdot \tan^{-1}\left[\frac{0{,}8\cdot(2.L^*_{P2}-0{,}2)}{([1{,}4.D^*_{appui}]^2 - D_h^{*2})}\right] \quad (19)$$

Fixation par vis :

$$S^*_{P2\,vis} = \left\{\frac{1}{2}\cdot\left(1-D_h^{*2}\right)\tan^{-1}\left[8{,}6\cdot(1{,}8\cdot 2L^*_p)-5\right] + \frac{1}{2}\cdot\left([1{,}4.D^*_{appui}]^2-1\right)\cdot\tan^{-1}\left[\frac{0{,}8\cdot(1{,}8\cdot 2L^*_p - 0{,}2)}{([1{,}4.D^*_{appui}]^2 - D_h^{*2})}\right]\right\} \quad (20)$$

avec : $D^*_{appui} = Min(D^*_{P1}\,;\,D^*_{P2})$

Le calcul de la souplesse de l'assemblage correspondra à la somme des souplesses de chaque pièce.

1.4.2.4. Souplesse pièce généralisée :

Pour un assemblage constitué de n pièces cylindriques empilées de hauteur L_{Pi}, avec le même diamètre D_h (Figure 13a), mais ayant des modules d'élasticité E_{Pi} et des diamètres de pièces D_{Pi} différents, la souplesse en compression δ_P de l'assemblage est donnée par la relation :

$$\delta_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_{Pi}}{S_{Peq\,i}.E_{Pi}}$$

avec : L_{Pi} : épaisseur de la pièce i ;
E_{Pi} : module d'élasticité du matériau de la pièce i ;
$S_{Peq\,i}$: section équivalente de la pièce i.

Exemple

On reprend l'assemblage de l'exemple précédent. Le calcul de $D_{P1\ limite}$ a montré une continuité de la zone de compression entre les pièces 1 et 2. D'autre part, ces deux pièces ont le même module d'élasticité. Dans ces conditions, on calcule indépendamment les souplesses pour le sous-assemblage {Pièce 1 + Pièce 2} et le sous-assemblage {pièce 3}.

a- Calcul {Pièce 3}

La pièce 3 est cylindrique et parfaitement concentrique avec la fixation. Il n'y a pas lieu de calculer une excentration. Par contre, il existe une discontinuité de zone de compression. Enfin, la zone minimale d'appui est relative à la valeur de D_{P3}. Ce qui nous oblige à calculer une souplesse spécifique à ce sous-ensemble à partir de la relation (17).

D_{h3}^*	L_{P3}^*	D_{P3}^*	S_{P3}^*	$S_{P\,eq3}$	$D_{P\,eq3}$	δ_{P3}
0,658	1,053	1,316	0,762	275,02 mm^2	18,713 mm	3,547 10^{-7} mm/N

b- Calcul {Pièce 1 + Pièce 2}

De par la forme de la pièce 2, il convient de prendre en compte l'influence de l'excentration du boulon.

$X^* = h/d_W = 1{,}053$ $Y^* = (0{,}5\ .\ D_{P2})/d_W = 1{,}895$ $D^*_{P_eq} = 2{,}868$

Le calcul de la souplesse relative à cet ensemble de pièces sera réalisé à partir de la relation (19).

D_{h1+2}^*	L_{P1+2}^*	$D^*_{appui\ 1+2} = Min(D^*_{p_eq}\,;\,D_{P3}^*)$	$S_{P\,eq1+2}^*$	$S_{P\,eq1+2}$	$D_{P\,eq1+2}$	$\delta_{P\,1+2}$
0,658	1,421	1,316	1,187	428,66 mm^2	23,362 mm	3,073 10^{-7} mm/N

La souplesse globale de l'assemblage est la somme des souplesses ($\delta_{P\,LGMT} = \delta_{P\,1+2} + \delta_{P\,3}$) : **$\delta_{P\,LGMT} = 6{,}620\ 10^{-7}$ mm/N**

1.4.3. Modèle basé sur l'Energie de déformation élastique.

On peut, en simulation par « élément finis », imaginer une approche plus simple basée sur le principe de la conservation de l'énergie. En effet, les logiciels Eléments Finis modernes permettent de calculer l'énergie de déformation de chaque pièce avec une grande précision.

Si l'on admet que les rigidités apparentes de chaque pièce ne dépendent que de l'énergie de déformation générée par la sollicitation correspondante, on peut alors calculer les raideurs de chaque ressort équivalent de manière indépendante en écrivant que l'énergie potentielle élastique de chaque pièce correspond à celle emmagasinée par le ressort équivalent. Soit :

L'énergie de déformation du boulon

$$E_{d\ B} = \frac{1}{2}K_B u_B^2 = \frac{1}{2}\delta_B F^2$$

L'énergie de déformation de la pièce

$$E_{d\,P} = \frac{1}{2}K_p u_p^2 = \frac{1}{2}\delta_p F^2$$

Il faut considérer que l'énergie de déformation du boulon est relative au modèle éléments finis. Certaines simplifications peuvent exister dans la représentation de la vis (par exemple : pas de prise en compte des filets). Aussi l'énergie calculée peut être légèrement différente de la vis réelle. Dans ces conditions, Le calcul de la souplesse du boulon par la méthode énergétique n'est pas recommandée.

F est l'effort de chargement de l'ensemble. Dans notre cas, l'effort à considérer est celui qui est relatif à la précontrainte soit F_0. u_A et u_B sont respectivement les déplacements axiaux de la pièce et de la vis sous la charge F. On détermine ainsi facilement :

$$\delta_B = \frac{2E_{d\,B}}{F^2} \quad \text{et} \quad \delta_P = \frac{2E_{d\,P}}{F^2}$$

qui apparaissent dans ce calcul comme indépendants. Toutefois, on doit impérativement vérifier pour un calcul éléments finis :

$$\delta_B + \delta_p = \frac{u}{F}$$

Soit $\frac{2E_{d\,B}}{F^2} + \frac{2E_{d\,P}}{F^2} = \frac{u}{F}$ ou $u = \frac{2(E_{d\,B} + E_{d\,P})}{F}$

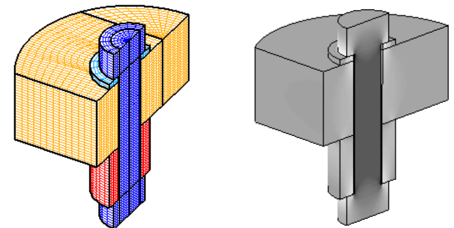
Cette expression n'étant rien d'autre que l'expression de la conservation de l'énergie totale de la structure composée des trois parties : la pièce, la vis et l'écrou lorsqu'il n'y a pas d'énergie dissipée sous forme thermique et que le travail des actions de liaison intérieures est nul.

$$\frac{1}{2} F.u = E_{d\,B} + E_{d\,P}$$

Remarques
La conservation de l'énergie sous la forme utilisée implique que le travail des forces intérieures soit nul. Ici, les forces intérieures sont, d'une part, les forces de contact entre la tête de vis ou l'écrou et la pièce, d'autre part, les forces de contact entre l'écrou et la vis. Cette hypothèse est moins réaliste pour le cas d'assemblage avec des vis à têtes fraisées.

Exemple
On reprend l'assemblage de l'exemple précédent. On impose une précontrainte à la vis (F_0 = 77858,7 N). A partir d'un calcul éléments finis, on récupère les énergies de déformation relatives à chaque pièce.

	Pièce 1	**Pièce 2**	**Pièce 3**
$\mathbf{E_{d\,Pi}}$	170.1	876.8	1046
$\boldsymbol{\delta_{Pi}}$	0,561 10^{-7} mm/N	2,893 10^{-7} mm/N	3,451 10^{-7} mm/N

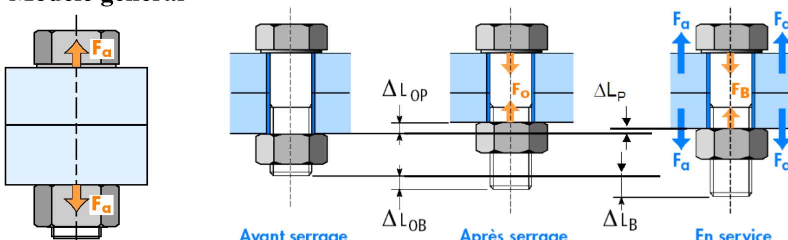


La souplesse globale de l'assemblage est la somme des souplesses :

$\delta_{P\,EF} = \delta_{P1} + \delta_{P2} + \delta_{P\,3}$ $\boxed{\mathbf{\delta_{P\,EF} = 6,905\ 10^{-7}\ mm/N}}$

2. ASSEMBLAGE SOUMIS A UN EFFORT EXTERIEUR SITUE DANS L'AXE DE LA FIXATION

2.1. Modèle général



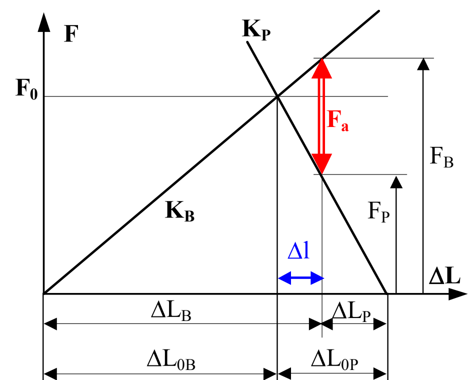


Figure 19 : Diagramme d'un assemblage sous chargement extérieur Fa

Si nous supposons que l'effort extérieur Fa est introduit dans le plan d'appui de la tête du boulon et dans le plan d'appui de l'écrou. Le boulon passe de l'état libre à l'état chargé par la force F_B par :

- Un allongement du boulon sous Fb égal à ΔL_B tel que : $\Delta L_B = \frac{F_B}{K_B}$
- Un raccourcissement des pièces sous F_P égal à ΔL_P tel que : $\Delta L_P = \frac{F_P}{K_P}$

Tant que l'effort extérieur Fa n'entraîne pas le décollement relatif des faces en contact, la variation de longueur Δl sous l'action de Fa est la même pour le boulon et pour les pièces, soit :

$$\Delta l = \Delta L_B - \Delta L_{0B} = \Delta L_{0P} - \Delta L_P$$

Que l'on peut écrire en fonction des raideurs :

$$\frac{1}{K_B} \cdot (F_B - F_0) = \frac{1}{K_P} \cdot (F_0 - F_P)$$

De plus l'équilibre de l'ensemble vissé donne :

$$Fa + F_P - F_B = 0$$

De ces deux relations on peut tirer les expressions de l'effort axial dans le boulon F_B, et de la résultante axiale des efforts dans les pièces F_P :

$$F_B = F_0 + \frac{K_B}{K_B + K_P} \cdot Fa \qquad F_P = F_0 - \frac{K_P}{K_B + K_P} \cdot Fa \qquad \text{et} \qquad \Delta F_B = \frac{K_B}{K_B + K_P} \cdot Fa \qquad \Delta F_P = \frac{K_P}{K_B + K_P} \cdot Fa$$

Le comportement d'un tel assemblage, précontraint et sollicité par un effort extérieur porté par l'axe du boulon, peut être résumé sur le « diagramme d'élasticité » de la Figure 19.

Nous constatons qu'un effort extérieur Fa appliqué sur un assemblage précontraint va induire un supplément d'effort dans le boulon proportionnel à Fa et à un coefficient $\frac{K_B}{K_B + K_P}$ (*stiffness constant of the joint*) qui sera toujours bien inférieur à 1. Il va en résulter un phénomène de "filtrage" de l'effort extérieur, extrêmement bénéfique pour la tenue dynamique de la vis. Ce comportement se conserve tant qu'il n'y a pas décollement des deux pièces, ce qui devra être assuré par la précharge minimale comme le montre la Figure 20.

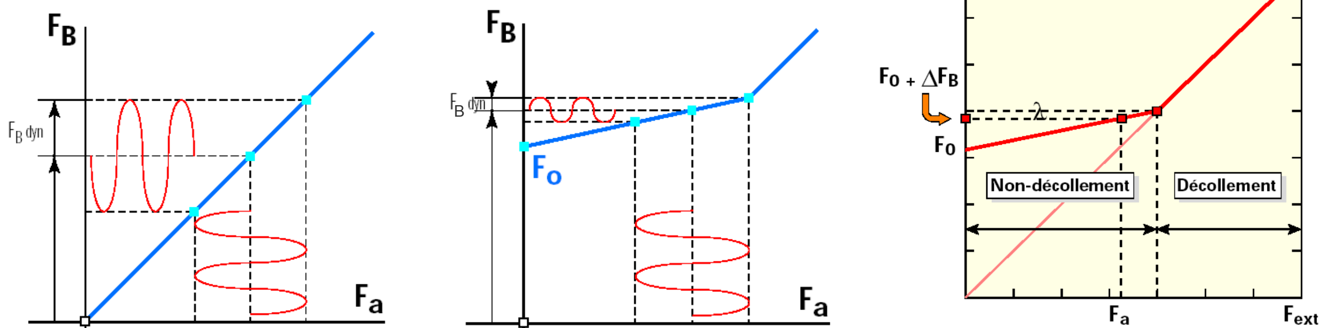


Figure 20 : diagramme de comportement

2.2. Facteur d'introduction de charge

Jusqu'à présent, on avait considéré que la force extérieure Fa n'était appliquée que sous la tête de la vis et sous l'écrou. Or, suivant la forme des pièces assemblées, la sollicitation sera différente suivant que l'introduction de l'effort sera voisine de la tête de vis, quelconque ou voisine du plan de l'interface des deux pièces. Par conséquent, on définit le facteur d'introduction de charge β qui tient compte de la position de l'application de la charge.

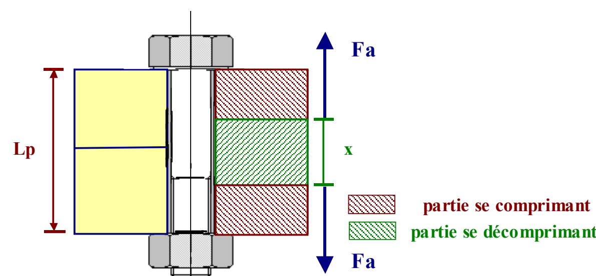


Figure 21 : Facteur d'introduction de charge $\beta = x/L_P$

Dans la plupart des cas, le niveau d'introduction de la charge se situe à l'intérieur des pièces assemblées et une partie de la rigidité des pièces participe différemment au comportement dynamique de l'assemblage (Figure 21).

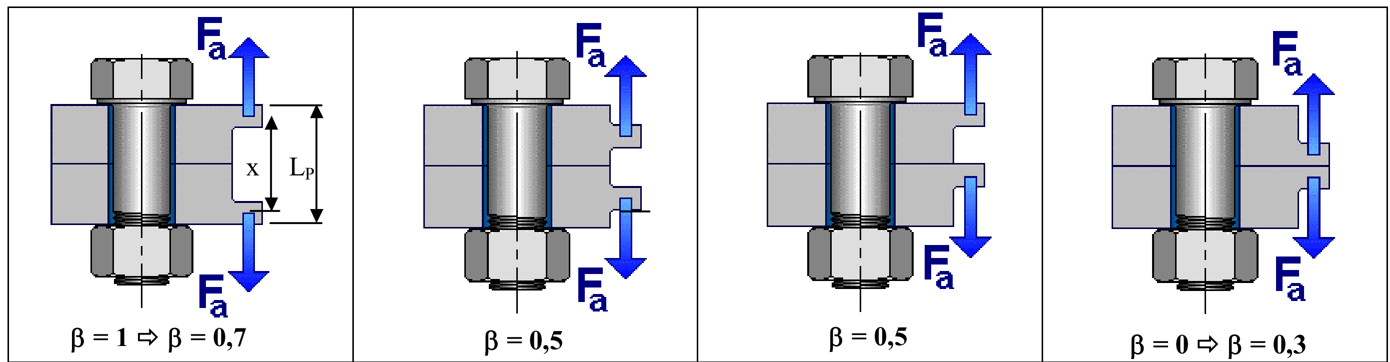


Figure 22 : Facteur d'introduction de charge β = x/L_P

Si nous considérons le cas général d'introduction de l'effort extérieur dans deux plans éloignés de **x** pour des pièces modèles de longueur L_P, nous pouvons lui appliquer le même calcul que précédemment. Le facteur d'introduction de charge β varie par conséquent en fonction de l'application de la force extérieure. La Figure 22 donne des valeurs de β pour différentes configurations d'assemblage couramment utilisées.

Les expressions générales des forces exercées dans le boulon et dans les pièces, lorsque la position de l'introduction de la force extérieure est quelconque, sont :

$$F_B = F_0 + \beta \frac{K_B}{K_B + K_P} \cdot Fa \qquad F_P = F_0 - \left(1 - \beta \frac{K_B}{K_B + K_P}\right) \cdot Fa$$

On appellera facteur de charge de l'assemblage le coefficient de filtrage λ défini par le rapport de rigidité de l'assemblage, soit :

$$\lambda = \beta \frac{K_B}{K_B + K_P}$$ ou bien en terme de souplesse $$\lambda = \beta \cdot \frac{\delta_p}{\delta_b + \delta_p}$$

En tenant compte de cette notation, on a :

$\Delta F_B = \lambda Fa$ qui représente l'accroissement d'effort dans le boulon par rapport à la valeur de la précharge, dû à l'application de Fa.

$\Delta F_P = (1 - \lambda) Fa$ qui représente la diminution du serrage des pièces dûe à l'application de Fa.

On remarquera que $\lambda \ll 1$, dans le cas d'assemblages correctement dimensionnés, ce facteur λ est voisin de 0,1.

2.3. Choix des raideurs et de la forme des pièces

Pour un montage où les valeurs de F_0 et de Fa sont fixées, on peut définir deux stratégies :

- F_P restera d'autant plus grand que β sera voisin de 1 (fonction de la forme des pièces) et que K_B sera grand et K_P petit. Ainsi, dans le cas d'étanchéité plane où il faut que, après application des charges, la pression de contact qui assure l'étanchéité reste suffisante, il faudrait utiliser des boulons rigides (c'est-à-dire de gros diamètre et de faible longueur) et des pièces élastiques (avec un faible module d'élasticité et de faible section, ce qu'on obtient en interposant un joint).
- F_P sera d'autant plus petit que K_B sera petit et K_P grand et que β sera voisin de 0. Ainsi, pour diminuer la valeur de F_B , c'est-à-dire à section donnée pour diminuer les contraintes dans la vis, il faut diminuer K_B donc avoir des boulons élastiques (c'est-à-dire de grande longueur) et augmenter K_P donc avoir des pièces rigides (c'est-à-dire de section suffisante et de grand module d'élasticité). Il faut, dans le cas des assemblages transmettant des efforts importants, éviter l'interposition d'un joint plan qui fait chuter de façon considérable la raideur de l'ensemble des pièces et préférer, chaque fois que cela est possible, l'utilisation d'un joint torique qui rend l'étanchéité indépendante de la transmission des efforts par la liaison mécanique boulonnée.

De plus, un bon dessin des pièces peut modifier de façon fondamentale le supplément d'effort supporté par le boulon et pratiquement le rendre nul (β ≈ 0) tant qu'il n'y a pas décollement des pièces (Figure 20). Ces conditions sont fondamentales dans le cas de sollicitations variables avec le temps (fatigue).

3. PRECHARGE MINIMALE FONCTIONNELLE F_{0MIN}

3.1. Force de serrage résiduelle minimale F_{Pmin}

Lorsque les pièces serrées sont soumises à un effort extérieur axial centré de compression, la précharge doit être suffisante pour empêcher le décollement sous-tête et/ou sous-écrou de la fixation. F_{Pmin} est un supplément de précharge (dite « précharge

résiduelle ») ajouté à F_{0min} pour ne pas avoir une pression nulle aux plans de joint lorsque l'effort axial est maximal (limite de décollement). En première estimation on peut considérer : $F_{Pmin} \approx \xi$ Fa avec $3\ \% \leq \xi \leq 5\ \%$.
Dans le cas de pièces serrées soumises à un effort extérieur axial centré de compression, le choix d'ajouter une précharge résiduelle F_{Pmin} ne doit pas être considéré comme systématique mais, plutôt comme une sécurité supplémentaire.

Si l'assemblage est sollicité par un effort transversal F_T, il y a lieu de prendre en compte une valeur de serrage minimale pour éviter le risque de glissement à l'interface des pièces serrées. Pour cette configuration de non-glissement, on respectera la condition suivante :

$$F_{P\,min} \geq \frac{F_T}{f}$$ avec f : coefficient d'adhérence à l'interface des pièces serrées.

3.2. Perte de précharge due au fluage des pièces ΔFz

Il existe un tassement des pièces ΔLe immédiatement après le serrage (phase de mise en place de la liaison) et pendant le fonctionnement. Ce tassement des pièces entraîne une perte de précharge ΔFz. La précharge minimale est encore augmentée de ΔFz dont l'expression vaut :

$$\Delta F_z = \frac{\Delta Le}{\delta_b + \delta_p} \qquad \text{avec} \qquad \Delta Le = 3{,}29.10^{-3} \cdot \left(\frac{L_p}{d}\right)^{0{,}34}$$

3.3. La précharge minimale fonctionnelle

La précharge minimale (fonctionnelle) à installer dans l'assemblage doit satisfaire à tous les critères décrits ci-dessus, c'est-à-dire le ***non-glissement*** ($F_{Pmin} \geq F_T/f$), et le ***non-décollement*** des plans de joint.

La précharge minimale requise lors du montage est égale à la précharge minimale fonctionnelle majorée, par anticipation, des pertes de précharge dues aux tassements et éventuellement au fluage des pièces assemblées, soit :

$$F_{0\,min} = (1-\lambda)\,.\,Fa_{max} + F_{P\,min} + \Delta F_Z$$

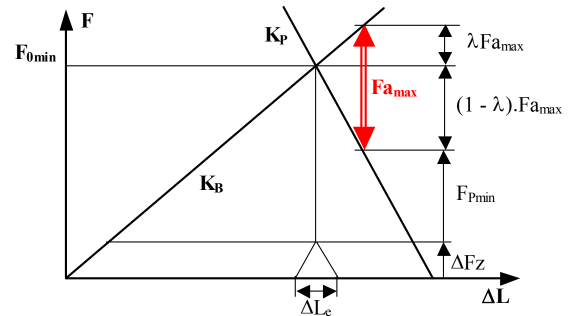


Figure 23 : Précharge minimale fonctionnelle

4. LIMITATION DU SERRAGE

La précharge maximale F_{0max} admise pendant le serrage peut être limité par soit par les conditions limites du matériau (R_e ou $R_{p0,2}$) et/ou en fonction des moyens de serrage employés.

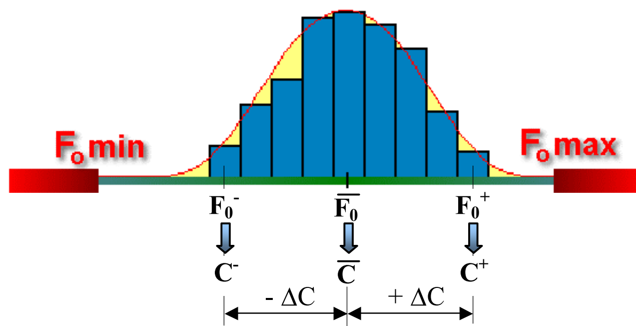


Figure 24 : Prise en compte des conditions de serrage

Sur la Figure 24 on a représenté les bornes limites de la précharge (F_{0min} et F_{0max}).
A l'intérieur de cette plage, le couple de serrage effectif va dépendre du type de serrage. Cela va conditionner la mise en place d'un effort nominal de serrage $\overline{F_0}$ et donc un couple nominal $\overline{C}$. Ce couple nominal sera borné par une limite inférieure C^- et une limite supérieure lequel sera C^+ qui dépendra directement de la précision du moyen de serrage ΔC/C. Le couple C correspond au couple nominal calculé ou imposé.

4.1. La limitation est effectuée à partir de la limite élastique

On se fixe un seuil de la contrainte admissible en fonction d'un pourcentage de la contrainte élastique. Soit γ_E le taux de serrage, on considère que $\sigma_{eVMmax} \leq \gamma_E$ Re. Le choix de la valeur de γ_E dépendra du contexte de l'étude à mener. Par expérience, on peut fixer la règle suivante : $0{,}8 \leq \gamma_E \leq 0{,}9$.

Le calcul de σ_{eVMmax} dans le corps de la fixation au montage vaut :

$$\sigma_{eVM\,max} = \sqrt{\left(\frac{F_{0\,max}}{A_s}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{16\cdot C_{1\,max}}{\pi\cdot d_s^3}\right)^2} \qquad \text{avec} \qquad C_{1max} = F_{0max}\,(0{,}16\,P + 0{,}583\,d_2\,.\,f_1)$$

En tenant compte des remarques précédentes on en déduit un seuil maximal de précharge F_{0max} :

$$\gamma_E . Re \geq F_{0max} \sqrt{\left(\frac{1}{A_s}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{16 . (0{,}16\,P + 0{,}583 . d_2 . f_1)}{\pi \cdot d_s^3}\right)^2}$$

$$F_{0max} \leq \frac{\gamma_E . Re}{\sqrt{\left(\frac{1}{A_s}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{16 . (0{,}16\,P + 0{,}583 . d_2 . f_1)}{\pi \cdot d_s^3}\right)^2}}$$

Exemple :
On désire calculer le seuil maximal de la précontrainte que pourrait supporter une vis HM12 de classe de qualité 10.9. Pour cette étude on considère les paramètres suivants γ_E = 90% et f_1 = 0,15.

- Couple de Torsion.

$C_{1max} = F_{0max}\,(0{,}16\,P + 0{,}583\,d_2\,f_1)$
$C_{1max} = F_{0max}\,(0{,}16 \,.\, 1{,}75 + 0{,}583 \,.\, 10{,}863 \,.\, 0{,}15)$
$C_{1max} = 1{,}23\,F_{0max}$

$d = 12$ $\quad$ $d_2 = d - 0{,}6495 \,.\, P$ $\quad$ $f_1 = 0{,}15$
$P = 1{,}75$ $\quad$ $d_3 = d - 1{,}2268 \,.\, P$

- Contrainte de torsion.

$$\tau_{max} = \frac{16 \cdot C_{1max}}{\pi \cdot d_s^3} = \frac{16 \cdot 1{,}23}{\pi \cdot 10{,}36^3} \cdot F_{0max}$$

avec $d_s = \frac{d_2 + d_3}{2} = 10{,}36\,mm$ $\quad A_S = 84{,}3\,mm^2$

$\tau = 0{,}05634\,F_{0max}$

- Contrainte de Von Mises

$$\sigma_{eVM\,max} = \sqrt{\left(\frac{F_{0max}}{A_s}\right)^2 + 3 \cdot (0{,}005634 \cdot F_{0max})^2}$$

$\sigma_{eVMmax} = 0{,}01536\,F_{0max}$

- Calcul de F_{0max} admissible.

$$F_{0max} = \frac{0{,}9 \cdot Re}{0{,}01536} = 58{,}59 \cdot Re$$

Classe 10.9 Re_{mini} = 940 MPa

$\boxed{F_{0max} = 55065\ N}$

4.2. les moyens de serrage conditionnent la précharge F_{0max}
En fonction des moyens conventionnels et de la méthode de serrage (au couple ou à l'angle), la norme FD E 25-030 propose un coefficient d'incertitude de serrage α_i. le Tableau 9 récapitule les valeurs de coefficient α_i à utiliser en fonction du matériel de serrage.

Coefficient d'incertitude de serrage α_i suivant le moyen de serrage utilisé (1).		
Moyen de serrage	**Précision sur la précontrainte F_0**	α_i
Clé dynamométrique Visseuse rotative avec étalonnage périodique sur le montage (mesure d'allongement de la vis ou mesure à la clé dynamométrique du couple de serrage)	± 20%	1,5
Clé à choc avec adaptation de rigidité et étalonnage périodique sur le montage (au moins aux mesures à la clé dynamométrique du couple de serrage par lot)	± 40%	2,5
Clé à main Clé à choc sans étalonnage	± 60%	4
Serrage à l'angle	± 10%	1,2
(1) Ces valeurs ne sont qu'indicatives. Le coefficient α_i dépend non seulement de la précision et de la bonne utilisation des moyens de serrage, mais également de la dispersion liée aux phénomènes de frottement sous tête et dans le filetage. La valeur de α_i peut donc être modulée suivant la plus ou moins bonne précision que l'on a sur la valeur du coefficient de frottement **f**.		

Tableau 9 : Coefficient d'incertitude de serrage α_i

L'expression de la précharge maximale vaut :

$F_{0max} = \alpha_i \,.\, F_{0min}$

Dans certaines méthodes de calcul on fait intervenir la précision des outillages pour calculer au plus juste les bornes du couple de serrage C calculé ou imposé. Ce couple est dépendant de la dispersion due au serrage (**ΔC/C**). Le Tableau 10 issue de la norme FD E 25-030 donne des valeurs de dispersion en fonction du matériel utilisé.

Connaissant la précision ΔC/C du vissage, on en déduit la valeur nominale du couple de vissage :

$$\overline{C} = \frac{C^+}{\left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right)} \quad \text{ou} \quad \overline{C} = \frac{C^-}{\left(1 - \frac{\Delta C}{C}\right)}$$

Le passage du couple à la charge se fait par l'application de la relation de Kellermann & Klein soit :

$$F_0^- = \frac{C^-}{0{,}16 \cdot P + 0{,}583 \cdot d_2 \cdot f_1 + r_m \cdot f_2} \quad \text{ou} \quad F_0^+ = \frac{C^+}{0{,}16 \cdot P + 0{,}583 \cdot d_2 \cdot f_1 + r_m \cdot f_2} \quad \text{ou} \quad \overline{F_0} = \frac{\overline{C}}{0{,}16 \cdot P + 0{,}583 \cdot d_2 \cdot f_1 + r_m \cdot f_2}$$

A partir de ces relations, on peut en déduire une valeur du facteur de serrage $\alpha_i = F_0^+ / F_0^-$.

dispersion du couple de serrage : ΔC/C	Matériel			Utilisation
	Manuel portatif	Motorisé portatif	Motorisé fixe	
± 20 % à ± 50 %		Clés à chocs simples		≥ 50 N.m
		Visseuses à crabots		≤ 50 N.m
± 10 % à ± 20 %		Visseuses simples à calage Pneumatique		≤ 10 N.m
		Visseuses simples à calage électrique		≤ 10 N.m
		Clés à chocs à énergie emmagasinée (barre de torsion ou autre procédé)		≥ 10 N.m
		Clés à renvoi d'angle à calage		≤ 20 N.m
	Clés dynamométriques à déclenchement simple (voir E 74-325)			≤ 400 N.m
			Moteurs pneumatiques simples	Sans limitation
± 5 % à ± 10 %			Visseuses hydrauliques	-
	Clés dynamométriques à déclenchement à réarmement automatique			≤ 800 N.m
	Clés dynamométriques à lecture directe à cadran			≤ 2000 N.m
		Clés à renvoi d'angle à déclenchement		≤ 80 N.m
			Moteurs pneumatiques à contrôle de couple	Sans limitation
			Moteurs à pulsations	Sans limitation
< ± 5 %			Visseuses électriques	Sans limitation
	Clés dynamométriques électroniques			≤ 400 N.m
			Moteurs à deux vitesses	Sans limitation
			Moteurs asservis électroniquement	Sans limitation

Tableau 10 : Dispersion de serrage au couple (ΔC/C)

Exemple :
Reprenons les données de l'exemple précédent. On considère que le serrage sera réalisé par une clé dynamométrique dont la précision, pour le constructeur, est estimée à 10 %, ($f_1 = f_2 = 0{,}15$ et $r_m = 7{,}6$).

A partir du calcul de $F_{0max} = 55065$ N, on fait le choix de caler le couple C^+ sur la valeur maximale $F_0^+ = F_{0max}$. Dans ces conditions on obtient :

$C^+ = F_0^+ .(0{,}16\ P + 0{,}583\ d_2\ f_1 + r_m\ f_2)$ soit : $C^+ = 130{,}5$ N.m

On en déduit la valeur nominale $\overline{C}$ en fonction de la précision :

$$\overline{C} = \frac{C^+}{\left(1+\frac{\Delta C}{C}\right)} \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta C}{C} = \pm 10\,\% \quad \text{soit :} \quad \overline{C} = \frac{130{,}5}{(1+0{,}1)} = 118{,}6\ \text{N.m}$$

De même, on détermine la valeur minimale de C^- :

$$C^- = \overline{C}.\left(1-\frac{\Delta C}{C}\right) \qquad C^- = 118{,}6\ .\ (1-0{,}1) \qquad C^- = 100{,}8\ \text{N.m}$$

La connaissance de ce couple permet de remonter à la précharge minimale que peut fournir la clé :

$$F_0^- = \frac{C^-}{0{,}16\cdot P + 0{,}583\cdot d_2\cdot f_1 + r_m\cdot f_2} \qquad F_0^- = \frac{100{,}2.10^3}{0{,}16\cdot 1{,}75 + 0{,}583\cdot 10{,}863\cdot 0{,}15 + 7{,}6\cdot 0{,}15} = 42279\ \text{N}$$

5. CALCUL DES CONTRAINTES DANS LA FIXATION

5.1. Tenue en statique

Après avoir déterminé les différentes conditions sur le calcul de la précontrainte, nous devons vérifier la tenue de la fixation sous les sollicitations les plus contraignantes.

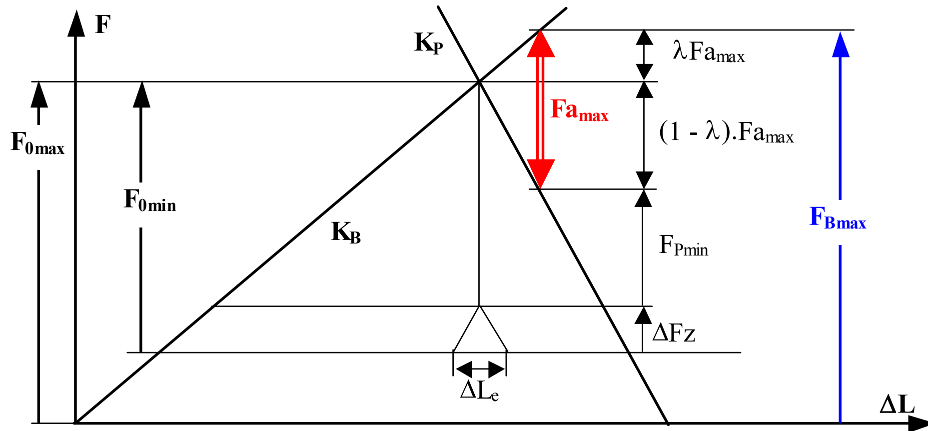


Figure 25 : Sollicitation statique d'un assemblage

L'expression de l'effort maximal dans le corps de la fixation devient :

$$F_{B\,max} = F_0^+ + \lambda\cdot Fa_{max}$$

on en déduit l'expression de la contrainte normale maximale :

$$\sigma_{max} = \frac{F_{B\,max}}{A_s}$$

L'expression de la contrainte maximale de torsion est :

$$\tau_{max} = \frac{16\cdot C_{1max}}{\pi\cdot d_s^3} \qquad \text{avec} \qquad C_{1max} = F_0^+\,(0{,}16\ P + 0{,}583\ d_2\ f_1)$$

Remarque :
La recommandation VDI 2230, préconise d_0 pour le calcul de la contrainte de torsion. Des essais expérimentaux ont mis en évidence que prendre d_0 surestimait cette contrainte. Il est préférable de considérer le diamètre résistant d_s dans le calcul de τ_{max}.

Par application du critère de Von Mises, on obtient la contrainte équivalente maximale :

$$\sigma_{eVM\,max} = \sqrt{\left(\frac{F_{B\,max}}{A_s}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{16\cdot C_{1\,max}}{\pi\cdot d_s^3}\right)^2}$$

Nous devons calculer la valeur de la contrainte normale maximale équivalente (σ_{eVMmax}) et vérifier quelle soit inférieure à la valeur minimale de la limite élastique de la classe de qualité considérée. Cette vérification assure que l'assemblage reste globalement dans le domaine élastique.

Le calcul du coefficient de sécurité en statique α_s vaut :

$$\alpha_s = \frac{Re_{min}}{\sigma_{eVM\,max}}$$

En pratique, il est conseillé de respecter la condition suivante :

$$\frac{\sigma_{eVM\,max}}{Re_{min}} \leq 90\%$$

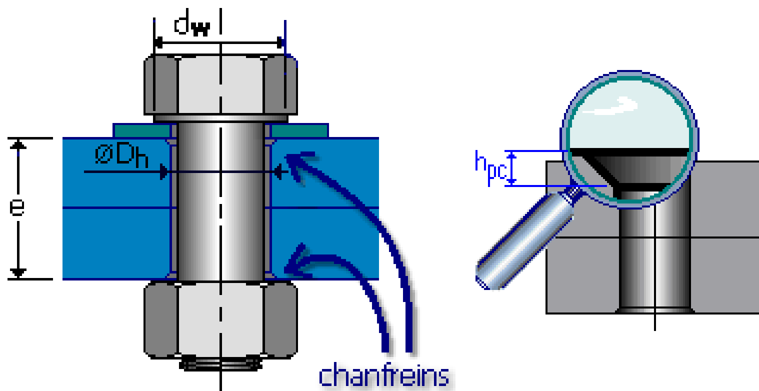
Si l'on souhaite tenir compte de cette condition, le coefficient de sécurité minimal en statique α_s vaudrait : $\alpha_s \geq 1{,}11$.

5.2. Vérification de la pression sous tête

Nous devons vérifier la pression au contact tête/pièce ou écrou/pièce.
On considère que cette pression est uniformément répartie aux interfaces de contact et qu'elle ne dépasse pas la pression de matage du matériau le moins résistant.

$$\frac{F_{Bmax}}{A_c} \leq p_m$$

avec $A_c = \frac{\pi}{4}.\left(d_W^2 - D_h^2\right)$ surface de contact sous tête.



Matériaux constitutifs des pièces assemblées			Contrainte maximale admissible (MPa)
Nature	**Désignation, caractéristiques, pourcentage de carbone ou traitement**		
Acier	État recuit	0,16 ⩽ C % ⩽ 0,22	240
		0,35 ⩽ C % ⩽ 0,40	280
		0,42 ⩽ C % ⩽ 0,48	320
	État trempé et revenu	R_m > 900 MPa	750
		R_m > 1 200 MPa	1 000
		Épaisseur cémentée 0,6 mm	1 400
		Épaisseur cémentée 1 mm	1 800
Acier inoxydable	Z 10 CN 18-09	500 < R_m < 700 MPa	210
Fonte	Ft 25		450
	Malléable perlito-ferritique MN 550-4 À graphite sphéroïdal FGS 500-7		550
Alliage d'aluminium	A-S 10 G (Y20/Y30)		80
	A-S 10 G (Y23/Y33)		130
	A-S 9 U3 (Y4)		180
	AU 5GT (Y24)		180

Tableau 11 : Contraintes maximales admissibles (d'après norme FD E 030)

Le Tableau 11 donne des valeurs de contrainte maximale admissible afin d'éviter le matage. Si cette condition n'est pas réalisée, il importe d'augmenter A_c en utilisant un boulon à embase ou en utilisant une rondelle plus appropriée.

D'une façon plus générale, on vérifie cette pression dans tous les plans de joints de l'assemblage. La surface de contact est alors déterminée à l'aide du cône de Rotscher (angle φ) qui donne une approximation grossière de la zone de contact et de la répartition de pression.

5.3. Tenue en Dynamique

Les charges ont souvent une allure dynamique, variant dans le temps à une grande vitesse. Leur action s'accompagne alors de vibrations des ouvrages ou de leurs éléments isolés.
Les contraintes engendrées par les vibrations des pièces peuvent être de plusieurs fois supérieures en valeur à celles dues à l'action des charges statiques.
Les difficultés de calcul sont supérieures à celles en statique car les méthodes, notamment, de détermination des contraintes provoquées par les charges dynamiques et celles pour la détermination des propriétés mécaniques des matériaux sollicités par ce type de charges sont plus compliquées.

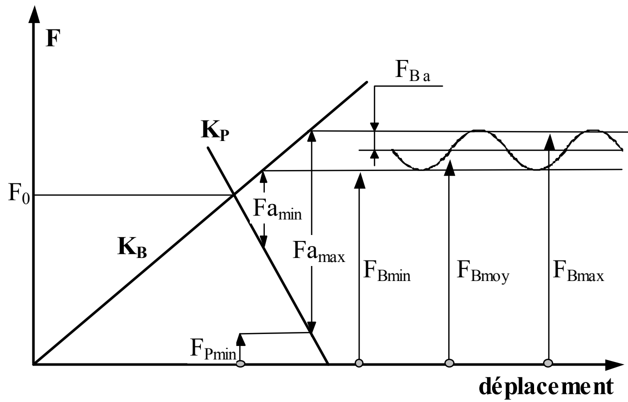


Figure 26 : Assemblage soumis à un effort variable de tension $Fa_{min} < Fa < Fa_{max}$

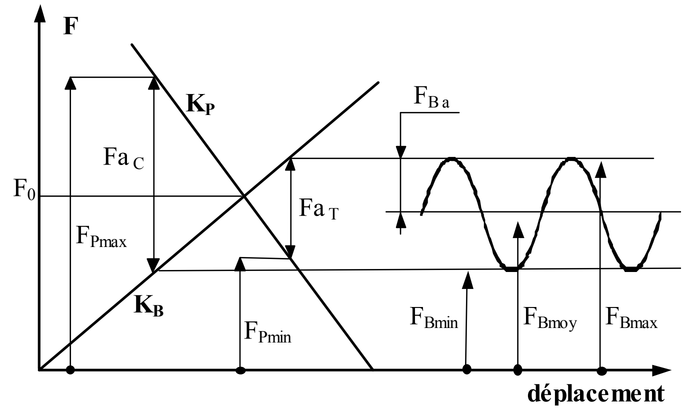


Figure 27 : Assemblage soumis à un effort variable de tension Fa_T et de compression Fa_C.

Les Figure 26 et 24 montrent comment on exerce une force en dynamique sur un boulon. Nous pouvons voir, ci-dessus, les diagrammes de comportement d'un tel assemblage dans les cas où $Fa_{min} < Fa < Fa_{max}$ et ensuite pour Fa_T pour de la traction et Fa_C pour de la compression.

Considérons le modèle d'assemblage boulonné représenté sur la Figure 26, précontraint par une force F_0 et chargé axialement par deux forces extérieures Fa d'intensités variables ($Fa_{min} < Fa < Fa_{max}$). Le calcul des contraintes dans la fixation donne les résultats suivants :

Contrainte moyenne : $$\sigma_{eVM\,m} = \sqrt{\left(\frac{F_0}{A_s} + \frac{\lambda \cdot (Fa_{max} + Fa_{min})}{2 \cdot A_s}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{16 \cdot C_1}{\pi \cdot d_s^3}\right)^2}$$

Contrainte alternée : $$\sigma_a = \frac{\lambda \cdot (Fa_{max} - Fa_{min})}{2 \cdot A_s}$$

Dans le cas d'application d'une charge alternative de tension Fa_T et de compression Fa_C, on obtient les valeurs suivantes :

Contrainte moyenne : $$\sigma_{eVM\,m} = \sqrt{\left(\frac{F_0}{A_s} + \frac{\lambda \cdot (Fa_T - Fa_C)}{2 \cdot A_s}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{16 \cdot C_1}{\pi \cdot d_s^3}\right)^2}$$

Contrainte alternée : $$\sigma_a = \frac{\lambda \cdot (Fa_T + Fa_C)}{2 \cdot A_s}$$

On détermine la contrainte alternée et on la compare à la limite de fatigue admissible :

$\sigma_a \leq K_N . \sigma_D$

avec :

K_N : Coefficient de correction de tenue dynamique (fonction du nombre de cycles, voir **Figure 28**).

σ_D : Limite de fatigue de la vis considérée.

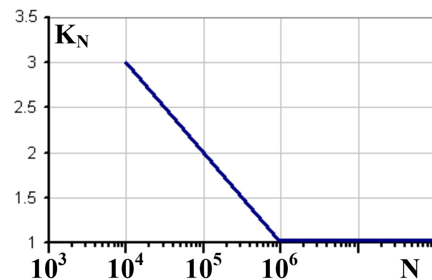


Figure 28 : Coefficient de correction de tenue dynamique K_N en fonction du nombre de cycles N.

5.4. Conclusion sur le comportement en fatigue de l'assemblage.

Si l'on ne précontraint pas l'assemblage, l'intégralité de l'effort dynamique extérieur est repris par le boulon. Cet état de fait va être très préjudiciable pour la tenue dynamique de la liaison, compte tenue des faibles performances dynamiques d'un boulon (40 à 50 MPa). Il conviendra donc d'installer une précharge minimale afin d'éviter le décollement des faces en contact. D'autre part la contrainte alternée est directement proportionnelle à la rigidité en tension du boulon K_B et inversement proportionnelle à la somme des rigidités K_B et K_P (rigidité en compression des pièces). On a donc intérêt, dans le cas d'un chargement en fatigue, à avoir des boulons souples (c'est à dire de diamètre mini et de longueur suffisante) et des pièces rigides.

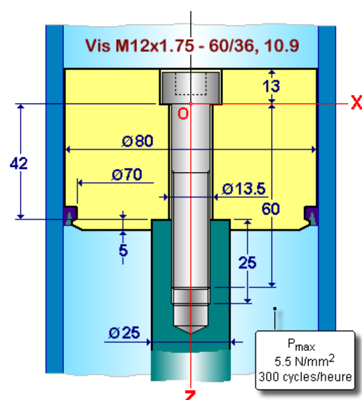
6. ALGORITHME PRATIQUE DE DIMENSIONNEMENT

Estimation des fixations
Nb, diamètre, qualité
$F_0 = 1.2\ Fa / Nb$ (non décollement)
$F_0 / As < 0.73\ Re$

- **STATIQUE**
  Evaluation de la marge
  $F_0 / As << 0.73\ Re$ et qualité 6.8 maxi ?
  - **Oui** ⇩
    cas non critique
    Calcul non détaillé
    Serrage à la main basique
  - **Non** ⇩
    calcul serrage
    F_{0MIN}, F_{0MAX}, f_1, f_2, C, σ_{eVMmax}, α_s, matage.
- **FATIGUE**
  Qualité 8.8 minimum
  $F_{alt} / As << K_N.50$?
  - **Oui** ⇩
    calcul serrage
    F_{0MIN}, F_{0MAX}, f_1, f_2, C, σ_{eVMmax}, α_s, matage.
  - **Non** ⇩
    calcul complet
    F_{0MIN}, F_{0MAX}, f_1, f_2, C, σ_{eVMmax}, α_s, matage.
    δ_b, δ_p, β, $\sigma_a \leq K_N.\sigma_D$

7. EXEMPLE D'APPLICATION

Piston et tige fixés par une vis centrale



Matériaux		**Conditions de serrage**	
Vis :	*Acier, classe 10.9* E_b = 205 000 N/mm^2 d_W = 17,23 (vis CHc)	***Serrage au couple***	
		Niveau	= maxi
Piston :	*Acier C45V* E_{p1} = 205 000 N/mm^2 R_{ec}min = 700 N/mm^2	Taux de serrage limite	= 90 % de R_e
		Précision de la visseuse	= ± 5 %
		Frottement dans les filetages	= 0,14 ± 0,03
Tige :	*Acier C45V* E_{p2} = 205 000 N/mm^2 R_{ec}min = 700 N/mm^2	Frottement sous tête	= 0,10 ± 0,02
		Précharge résiduelle mini	= 1000 N

Calculs à effectuer :

- souplesse de la vis et souplesse des pièces serrées,
- facteur de charge de l'assemblage,
- contrainte dynamique dans la vis (tenue en fatigue),
- précharge minimale requise pour assurer le non-décollement des pièces en service et précharge maximale admissible au montage,
- couple de vissage et précharge réalisée au montage,
- contraintes maximales dans la vis,
- pressions maximales aux plans de joint.

CONCEPTION DES RESSORTS DE COMPRESSION

DESIGN OF COMPRESSION SPRINGS

A. NOTIONS GENERALES

1. QU'EST CE QU'UN RESSORT ?

Un ressort évoque immanquablement, pour la plupart des personnes, un fil enroulé en hélice cylindrique, celui qu'on rencontre dans les stylos, les amortisseurs de voitures ou sur les fourches des motocyclettes. Il convient de savoir que ce type de ressort n'est qu'un des multiples composants de machines qui peuvent être regroupés sous l'appellation ressort. Pour préciser cette notion, voici la définition générale du ressort :

Un ressort est un système dont la fonction est de se déformer sous l'action d'une force ou d'un couple puis de restituer l'énergie emmagasinée à la reprise de sa forme initiale.

2. UN PEU D'HISTOIRE

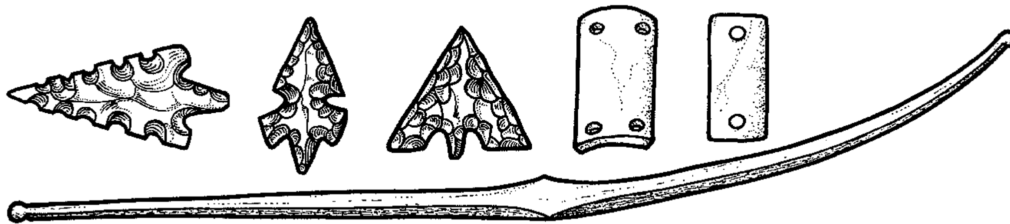


Figure 1 : Archerie du néolithique (encyclopedia-universalis)

Cette définition, très générale, conduit à considérer un grand nombre de composants comme appartenant à la famille des ressorts. On peut de cette manière considérer que les premiers ressorts apparaissent sous la forme des arcs utilisés par les premiers hommes pour chasser. Ils utilisent en effet l'énergie emmagasinée dans la pièce de bois lors de la tension de la corde pour lancer la flèche vers leur proie potentielle. La guerre, entre autres, apporte la catapulte sur les champs de bataille des Romains et des Grecs. L'énergie accumulée en tordant d'énormes écheveaux de peaux est brusquement libérée et projette avec force des projectiles divers. Les applications des ressorts dans des domaines plus pacifiques sont plus récentes comme, par exemple, le ressort en spirale pour l'horlogerie que l'on utilise au XVe siècle.

Pour voir apparaître les ressorts hélicoïdaux, il faut se tourner vers le domaine des transports. A l'origine, les civilisations antiques connaissent la roue. Les systèmes de transports qui l'utilisent alors n'ont pas de grandes performances en termes de maintien et de stabilité. Au XVIe siècle on voit apparaître les suspensions réalisées à l'aide de chaînes reliées à quatre pièces de bois. Dans ce système, c'est le bois, plus que la chaîne, qui réalise la fonction élastique. Le confort des voyageurs est grandement amélioré même si ceux-ci peuvent facilement être sujets au mal de mer compte tenu du tangage important des cabines. Au XVIIIe siècle, apparaît un vrai ressort de suspension avec l'utilisation de lames d'acier. Pour résoudre les problèmes de tangage sur les locomotives, Stephenson, dès 1816, installe des ressorts à lames entre la chaudière et le châssis. Ce principe est d'ailleurs appliqué aux premières automobiles.



Figure 2 : Un taxi Renault en 1914 (photo : Pavlosky/Rapho)

Ce n'est que tardivement qu'apparaissent les ressorts hélicoïdaux car leur fabrication nécessite une bonne maîtrise de la déformation des matériaux. Les méthodes de fabrication par enroulement mécanique progressent tout au long de la deuxième moitié du XIXe siècle. Au moment où l'industrie automobile est en pleine expansion, les suspensions utilisant des ressorts hélicoïdaux autorisent des amplitudes de mouvement supérieures aux anciennes conceptions. C'est un avantage important car les routes sont bien moins régulières que les voies ferrées. Le ressort hélicoïdal connaît ainsi un essor rapide dès le début du XXe siècle. C'est donc au cours de ce siècle qu'il s'impose tant sur le plan qualitatif que sur le plan quantitatif.

L'industrie du ressort est en train de naître et son évolution se poursuit encore de nos jours. Il est vrai que la fabrication de ressorts de qualité reste une opération délicate. En effet, pour s'adapter aux dispersions dans les propriétés des matériaux, le réglage des machines actuelles nécessite un grand savoir-faire de la part des opérateurs. Nous nous intéressons ci-après à la conception des ressorts fabriqués à froid (*cold-wound springs*), (qui est la plus répandue) et tout d'abord, aux matériaux utilisés.

3. LES MATERIAUX POUR RESSORTS

L'objectif du ressort est d'emmagasiner puis de restituer de l'énergie. On peut donc rapidement se dire que plus un matériau pourra être contraint avant de se déformer plastiquement, plus il sera apte à être utilisé pour la fabrication d'un ressort. Il existe bien sûr d'autres critères qui doivent être pris en compte.

La majorité des ressorts sont réalisés en acier. Voici les trois types d'aciers les plus utilisés :

- Acier non allié, tréfilé à froid, patenté (Pr EN 10270-1)
- Acier non allié, trempé à l'huile et revenu (Pr EN 10270-2)
- Acier inoxydable (Pr EN 10270-3)

Des normes ont été définies pour tous ces aciers afin que les fabricants puissent les utiliser en toute sérénité. Le projet de norme européenne distingue par exemple cinq classes pour les aciers tréfilés (SL, SM, SH, DM, **DH**). Ces classes imposent notamment au fabricant des tolérances sur la dimension du fil ainsi qu'une fourchette sur la résistance du fil.

Les aciers tréfilés sont souvent utilisés pour la fabrication des ressorts. Ces aciers ont une bonne résistance à la fatigue. Leur limite élastique est augmentée lorsque le formage d'un ressort est suivi d'un traitement thermique (revenu). Celui-ci permet de relâcher les contraintes internes dans le matériau. Ces aciers ont une faible résistance à la corrosion, mais on peut facilement leur ajouter un revêtement protecteur. Ils peuvent travailler à des températures très basses et sont sujets à la relaxation à haute température. Le domaine d'utilisation peut ainsi être compris entre -80°C et 150°C.

Les aciers trempés ont une bonne résistance à la fatigue et sont moins sujets à la relaxation que les aciers tréfilés. Suivant la relaxation tolérée, on peut considérer que le domaine d'utilisation va de -20°C à 170°C. Ces aciers ont une faible résistance à la corrosion.

Lorsque des problèmes de corrosion surviennent, l’utilisation des aciers inoxydables est conseillée. Ils ont une résistance à la fatigue inférieure aux deux aciers précédents. De nombreuses nuances existent. Les aciers inoxydables sont majoritairement issus de la nuance **1.4310**. **Appelée encore AISI 302**, elle contient 18% de chrome et 8% de nickel. Le domaine d'utilisation, assez important, peut aller de -200°C jusqu'à 300°C. Attention toutefois, cette nuance n'est amagnétique qu'à l'état recuit. La nuance 1.440 (AISI 316) a une excellente tenue à la corrosion mais des caractéristiques mécaniques inférieures. Pour une meilleure résistance à la relaxation et à la fatigue, on peut utiliser la nuance **1.4568 communément appelée 631** suivant la norme AISI ou encore 17/7PH.

D'autres matériaux peuvent être employés pour des applications spécifiques comme, par exemple, les alliages de cuivre au béryllium pour avoir une grande conductivité électrique.

4. LA FABRICATION DES RESSORTS HELICOÏDAUX (*helical springs*)

Le fil est livré aux fabricants de ressorts sous forme de bobines. Il y a de nombreuses manipulations à effectuer avant d’arriver au produit fini. Ces opérations peuvent pour la plupart être manuelles (on peut par exemple enrouler un fil autour d'un axe pour former le corps d'un ressort). Cependant, pour des raisons de productivité, la fabrication industrielle est essentiellement réalisée par des machines spécialisées.

4.1. Les machines

Voici le principe de fonctionnement le plus courant d'une machine conçue pour fabriquer (à froid) les ressorts hélicoïdaux à fils ronds.

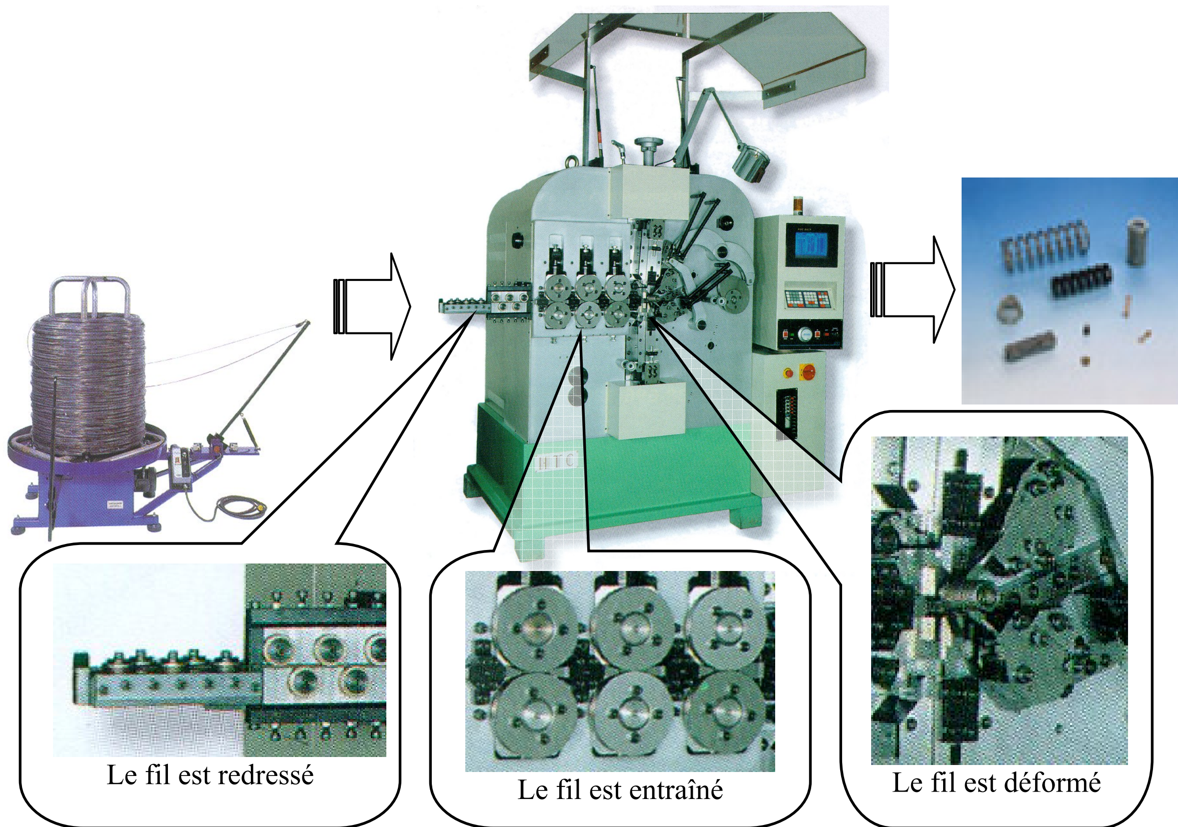


Figure 3 : Machine à fabriquer les ressorts (SMI)

Le fil venant des bobines est mis en mouvement par les galets d'entraînement de la machine. Tiré, il parcourt une première série de galets qui le redresse de manière à ce qu'il arrive vers la zone de déformation avec une géométrie bien régulière. Après avoir traversé les galets d'entraînement, le fil est poussé dans la zone de déformation. Dans cette zone, des obstacles sont successivement placés sur la trajectoire du fil de manière à le mettre en forme. Pour que la géométrie du ressort soit bien régulière, le moment d'arrivée des outils est contrôlé par des cames ou par commande numérique. Ce type de machine permet de réaliser le corps du ressort ainsi que certaines extrémités. Une fois mis en forme, le ressort subit en général d'autres opérations.

4.2. Les opérations de finition

A la sortie de la machine, on effectue souvent un traitement thermique (*heat treatment*) de revenu pour éliminer les contraintes internes emmagasinées lors de la déformation plastique du fil. Ce revenu augmente aussi la limite élastique de certains matériaux. Pour cela, le ressort est placé dans un four à air dont la température est comprise entre 200°C et 480°C pendant une durée qui peut aller de 5 minutes à 4 heures. Lorsque les conditions de production le permettent, le four est directement placé après la machine. Les ressorts tombent directement sur un tapis roulant et traversent le four. La vitesse de déplacement du tapis est déterminée pour que les ressorts restent dans l'enceinte du four pendant le temps désiré.

Pour augmenter la résistance à la fatigue du ressort, on peut réaliser un grenaillage (*shot peening*). Cette opération est un traitement mécanique de surface. On déforme plastiquement le matériau dans une couche superficielle en le martelant avec des billes projetées à grande vitesse. Pour que le grenaillage soit efficace, il faut qu'il soit régulier car la rupture du ressort intervient toujours dans la zone la plus faible. Les meilleurs résultats sont obtenus avec une grenaille homogène (en acier dur trempé et revenu dont la dureté doit être supérieure à celle des pièces traitées) projetée le plus perpendiculairement possible à la surface du ressort. Cette opération ne peut être effectuée que sur les ressorts qui ont un espace suffisant entre les spires.

On réalise aussi régulièrement des traitements anticorrosion en recouvrant la surface du ressort avec un matériau protecteur. C'est en principe la dernière étape de la fabrication du ressort. Celui-ci est ensuite contrôlé puis conditionné pour être livré. Le conditionnement et les procédures de contrôle sont définis pour chaque type de ressorts.

5. 4. LES TROIS PRINCIPAUX TYPES DE RESSORTS

Il existe de nombreux types de ressorts. Parmi ceux-ci, on distingue les ressorts hélicoïdaux de compression, les ressorts de traction et les ressorts de torsion.



Figure 4 : Quelques ressorts de compression (CETIM)

Le ressort de compression est le type de ressort le plus employé. Comme son nom l'indique, il est conçu pour être comprimé. La sollicitation doit ainsi être principalement axiale et dirigée vers le ressort. Pour faciliter l'application de la force, les extrémités des ressorts sont souvent rapprochées et meulées.



Figure 5 : Quelques ressorts de traction (CETIM)

Les ressorts de traction, quant à eux, doivent être sollicités de manière à augmenter leur longueur. Ils sont utilisés comme ressorts de rappel dans de nombreuses applications (portes, interrupteurs électriques, balais d'essuie-glace...). Il existe de nombreux systèmes d'accrochage. La méthode la plus courante consiste à déformer les dernières spires du ressort pour former une boucle ou un crochet.



Figure 6 : Quelques ressorts de torsion (CETIM)

Les ressorts de torsion, également enroulés en hélice, ont pour rôle essentiel de restituer un couple. Leur champ d'application est très vaste. Cela explique que les systèmes d'accrochage sont très divers et sont souvent conçus pour les applications considérées.

Le ressort de compression est le ressort le plus utilisé dans l’industrie, c’est aussi celui pour lequel les calculs sont les plus fiables c’est pourquoi nous intéressons prioritairement à sa conception. Si le ressort de compression hélicoïdal à fil rond est de géométrie relativement simple, la détermination de ses caractéristiques en vue d'une utilisation industrielle n'est toutefois pas une opération basique. Ce type de ressort doit en outre respecter les normes qui lui sont associées.

B. NOMENCLATURE ET FORMULES DE BASE

Les principaux paramètres de conception du ressort de compression sont définis sur la Figure 7. Elle présente la droite caractéristique du ressort de compression.

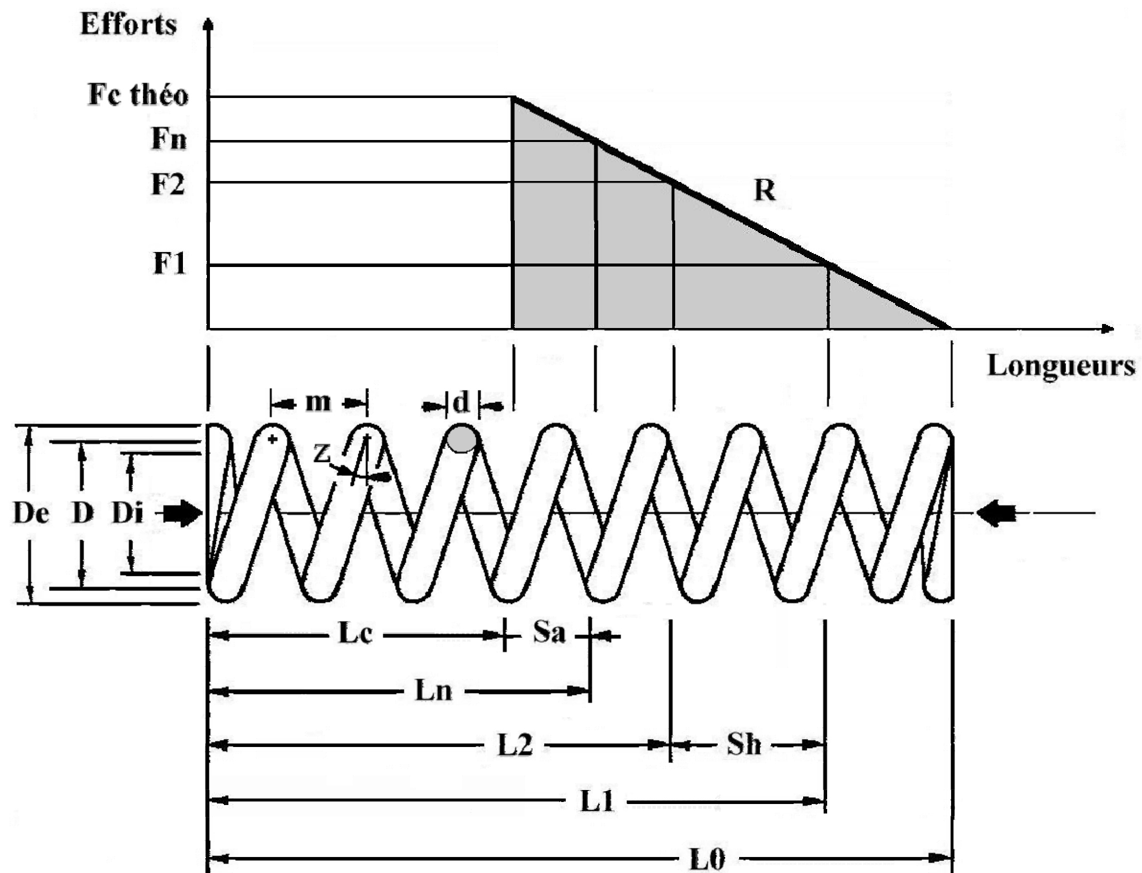


Figure 7 : Ressort de compression hélicoïdal à pas constant

Les limites et les caractéristiques des matériaux utilisés sont détaillées dans le Tableau 1. Le Tableau 2 regroupe la nomenclature et les formules de bases pour les ressorts de compression.

La norme DIN définie le domaine d'application de ces formules pour les ressorts de compression hélicoïdaux à fil rond enroulés à froid :

- ✓ $d \leq 17$ mm
- ✓ $D \leq 200$ mm
- ✓ $L0 \leq 630$ mm
- ✓ $n \geq 2$
- ✓ $4 \leq w \leq 20$

Tableau 1 : Limites matériaux pour ressorts de compression

Matériau	Acier DH *(steel)*	Inox 1.4310 *(Stainless steel)*
Limites du constructeur (mm)	$0.3 \leq d \leq 12$	$0.15 \leq d \leq 15$
G (N/mm^2)	81500	70000
E (N/mm^2)	206000	192000
Rm = f(d) (N/mm^2)	2230 - 355.94 Ln (d)	1919 - 255.86 Ln (d)
Contrainte maximale admissible τzul (% de Rm)	50	48
ρ (Kg/dm^3)	7.85	7.90

Tableau 2 : Nomenclature et formules de base des ressorts de compression

Symboles	Unité	Désignation	english	Formules
D	mm	Diamètre moyen des spires	*Mean diameter*	D = De – d
De	mm	Diamètre extérieur des spires	*Outside diameter*	De = D + d
Di	mm	Diamètre intérieur des spires	*Inside diameter*	Di = D - d
d	mm	Diamètre du fil	*Wire diameter*	d = De-D
E	N/mm^2	Module d'élasticité du matériau	*Young's modulus*	
F1, F2	N	Forces du ressort, rapportées aux longueurs L1, L2	*Loads*	F1 = R (L0 - L1) F2 = R (L0 - L2)
$Fc^{théo}$	N	Force théorique du ressort à Lc	*Load at solid*	$Fc^{théo} = R (L0 - Lc)$
Fn	N	Force du ressort à Ln		Fn = R (L0 - Ln)
fe	Hz	Fréquence propre du ressort	*Natural frequency*	$fe = \frac{3560\ d}{n\ D^2}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$
G	N/mm^2	Module de cisaillement	*Torsional modulus*	
k	-	Coefficient de contrainte en fonction du rapport d'enroulement w	*curvature correction factor*	$k = \frac{w + 0.5}{w - 0.75}$
L0	mm	Longueur libre	*Free length*	L0 = m n + (ni + nm) d
L1, L2	mm	Longueurs du ressort en charge, rapportées aux forces F1, F2	*Working lengths*	L1 = L0 – F1 / R L2 = L0 – F2 / R
Lc	mm	Longueur théorique à bloc (toutes les spires sont jointives)	*Length at solid*	Lc = d (n + ni +nm)
Ld	mm	Longueur développée		$Ld = \pi\ D\left(2 + nm + n / \cos(z)\right)$
LK	mm	Longueur critique de flambage	*Buckling length*	
Ln	mm	Plus petite longueur de travail admissible (géométriquement)		Ln = d (n + ni +nm) + Sa
Lr	mm	Plus petite longueur de travail admissible (contrainte maxi)		$Lr = L0 - (\pi\ d^3\ \tau zul) / (8\ D\ R\ k)$
M	g	Masse du ressort	*Spring mass*	$M = \rho\ 10^{-3}\ Ld\ \ \pi\, d^2 / 4$
m	mm	Pas du ressort	*pitch*	$m = \left(L0 - d\ \left(ni + nm\right)\right) / n$
N	-	Nombre de cycles avant rupture	*Number of cycles*	
n	-	Nombre de spires utiles	*Number of active coils*	$n = G d^4 / \left(8\ R\ D^3\right)$
ni	-	Nombre de spires pour les extrémités		
nm	-	Nombre de spires mortes	*Number of dead coils*	
nt	-	Nombre total de spires	*Total number of coils*	nt = n + nm + 2
R	N/mm	Raideur du ressort	*Spring rate*	$R = G\ d^4 / (8\ n\ D^3)$
Rm	N/mm^2	Valeur minimale de la résistance à la traction	*Ultimate tensile strength*	
Sa	mm	Somme des espaces minimums entre les spires utiles		$Sa = n\ (0.0015\ D^2 / d + 0.1d)$ si $N > 10^4$, Sa est multiplié par 1.5
Sh	mm	Flèche de travail (course)	*travel*	Sh = L1 - L2
Vol0	cm^3	Volume enveloppe pour L=L0		$Vol0 = \pi\ De^2\ \ L0 / 4000$
Vol2	cm^3	Volume enveloppe pour L=L2		$Vol2 = \pi\ De^2\ \ L2 / 4000$
W	Nmm	Travail du ressort	*Strain energy*	W = 0.5 (F1 + F2) (L1-L2)
w	-	Rapport d'enroulement	*Spring index*	w = D / d
z	°	Angle d'enroulement	*Pitch angle*	$z = \arctan\left(m / \pi / D\right)$
αF		Coefficient de durée de vie en fatigue	*Fatigue factor of safety*	
ρ	Kg/dm^3	Masse volumique		
τk2	N/mm^2	Contrainte de cisaillement corrigée pour une longueur de ressort L2	*Corrected shear stress*	$\tau k2 = 8\ D\ F2\ k / (\ \pi\ d^3)$
$\tau kc^{théo}$	N/mm^2	Contrainte de cisaillement corrigée théorique pour Lc		$\tau kc^{théo} = 8\ D\ Fc^{théo}\ k / (\ \pi\ d^3)$
τzul	N/mm^2	Contrainte maximale admissible		

C. NOTIONS A PRENDRE EN COMPTE

Pour qu'une conception de ressort soit valide, le concepteur doit prendre en compte de nombreuses considérations. Elles viennent directement de son problème de conception (considérations géométriques et fonctionnelles) mais aussi des contraintes de fabrication et des normes de calcul. Nous avons regroupé les considérations principales à intégrer pour la conception d'un ressort de compression.

1. LE DIAMETRE DU FIL

Les ressorts sont généralement conçus en exploitant les gammes de diamètres fournies en standard par les fabricants de fil. La Figure 8 montre les diamètres de fil en acier DH et les résistances mécaniques à rupture (Rm) associées.

QUALITE C			
∅ mm	Kg/mm²	N/mm²	Tol ∅
0,20	285/315	2800/3100	
0,25	275/305	2720/3010	± 0,008
0,30	270/300	2660/2940	
0,35	265/295	2600/2880	
0,40	260/290	2560/2830	
0,45	255/280	2510/2780	
0,50	255/280	2480/2740	
0,55	250/275	2440/2700	
0,60	245/270	2410/2670	± 0,01
0,65	245/270	2380/2640	
0,70	240/265	2360/2610	
0,75	240/265	2330/2580	
0,80	235/260	2310/2560	
0,85	230/260	2290/2530	
0,90	230/255	2270/2510	
0,95	230/255	2250/2490	
1,00	225/250	2230/2470	± 0,015
1,10	225/250	2200/2430	
1,20	220/245	2170/2400	
1,30	220/240	2140/2370	
1,40	215/240	2110/2340	
1,50	210/235	2090/2310	
1,60	210/230	2060/2290	
1,80	205/230	2020/2240	
2,00	200/225	1980/2200	
2,20	200/220	1940/2150	
2,50	195/215	1900/2110	± 0,02
2,80	190/210	1860/2070	
3,00	185/210	1840/2040	
3,20	185/205	1820/2020	
3,50	180/200	1780/1980	

QUALITE C			
∅ mm	Kg/mm²	N/mm²	Tol ∅
3,80	180/200	1750/1950	
4,00	175/195	1740/1930	
4,20	175/195	1710/1900	± 0,025
4,50	170/190	1690/1880	
4,80	170/190	1680/1860	
5,00	170/190	1660/1840	
5,50	165/180	1620/1800	
6,00	160/180	1590/1770	
6,50	160/175	1560/1740	
7,00	155/175	1540/1710	
7,50	155/170	1510/1680	± 0,035
8,00	150/170	1490/1660	
8,50	150/165	1470/1630	
9,00	150/165	1450/1610	
10,00	145/160	1410/1570	± 0,05
11,00	140/155	1380/1530	
12,00	140/155	1350/1500	
13,00	135/150	1320/1470	± 0,07
14,00	130/145	1290/1440	
15,00	130/145	1270/1410	
16,00	125/140	1240/1390	
17,00	125/140	1220/1360	± 0,08
18,00	120/135	1200/1340	
19,00	120/135	1180/1320	± 0,1
20,00	120/135	1160/1300	

Figure 8 : Fils en acier DH (AMIC)

Par contre, il faut bien garder à l'esprit que pour des applications particulières, les fabricants de fil peuvent livrer des bobines de fils avec des diamètres sur mesure.

Remarque : le Tableau 1 met en évidence des limitations sur les diamètres de fil venant des capacités de mise en forme des fabricants de ressorts.

2. LA CONTRAINTE MAXIMALE STATIQUE

La contrainte maximale statique ne doit pas dépasser la limite élastique du ressort. Nous rappelons d'abord la méthode de définition des contraintes dans le corps des ressorts.

2.1. Calcul des contraintes pour les ressorts de compression

Voici la répartition des efforts intérieurs exploitée :

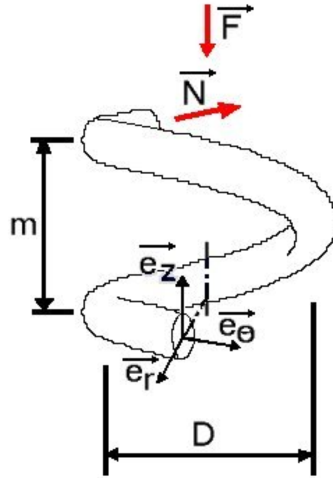
$\vec{N}$: effort normal, orthogonal à la section s.

$\vec{T}$: effort tranchant, dans le plan de la section s.

$\vec{Mf}$: moment de flexion autour d'un axe contenu dans le plan de la section s.

$\vec{Mt}$: moment de torsion autour de l'axe orthogonal à la section s.

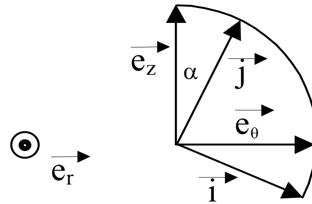
On effectue le calcul en coordonnées cylindriques en utilisant le repère ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) en tout point du ressort et le repère ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{e}_r$) lié à la section droite.



L'angle d'enroulement α est donné par la relation : $\mathrm{Tan}(\alpha) = m/(\pi D)$

Le repère lié à la section s perpendiculaire à l'axe du fil du ressort est défini par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$



En reprenant les notations du premier paragraphe, on a donc :

$$\vec{N} = \mathrm{N}\,\vec{i} \qquad \vec{T} = \mathrm{T}\,\vec{j}$$

$$\vec{Mt} = \mathrm{Mt}\,\vec{i} \qquad \vec{Mf} = \mathrm{Mf}\,\vec{j}$$

Ces notations peuvent être regroupées :

$$\vec{R} = \mathrm{N}\,\vec{i} + \mathrm{T}\,\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{M} = \mathrm{Mt}\,\vec{i} + \mathrm{Mf}\,\vec{j}$$

Dans une fonctionnement classique, le ressort est soumis à la force axiale F uniquement. Lors d'une compression, F > 0. Le torseur des efforts intérieurs au centre de la section est égal au torseur des efforts appliqués sur la partie gauche :

$$\vec{R} = -F\,\vec{e}_z$$

$$\vec{M} = -F\,D/2\,\vec{e}_\theta$$

D'où par projection sur le repère ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{er}$) :

$$\vec{\mathrm{R}} = \mathrm{F}\sin\alpha\,\vec{i} - \mathrm{F}\cos\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{\mathrm{M}} = -\mathrm{F}\,\mathrm{D}/2\cos\alpha\,\vec{i} - \mathrm{F}\,\mathrm{D}/2\sin\alpha\,\vec{j}$$

On en déduit les efforts intérieurs :

$$\vec{\mathrm{N}} = \mathrm{F}\sin\alpha\,\vec{i} \qquad \vec{\mathrm{T}} = -\mathrm{F}\cos\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{\mathrm{Mt}} = -\mathrm{F}\,\mathrm{D}/2\cos\alpha\,\vec{i} \qquad \vec{\mathrm{Mf}} = -\mathrm{F}\,\mathrm{D}/2\sin\alpha\,\vec{j}$$

Considérons maintenant le point M de coordonnées (x1, x2, x3) dans le repère local ($0_S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{e}_r$). Avec l'hypothèse de St Venant, la contrainte de flexion (ou de tension) $\sigma 11$ et la contrainte de torsion (ou de cisaillement) τ sont définies par :

$\sigma 11 = -\mathrm{Mf}\,x3 / J - N / S$ et $\tau = (0, \sigma 12, \sigma 13)$

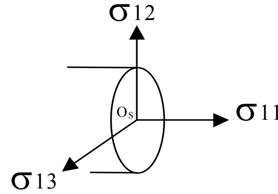
La répartition des contraintes associée est :

$\sigma 11 = -F \sin\alpha / S + x3\ F\ D \sin\alpha / (2\ J)$

$\sigma 12 = -\ x3\ F\ D \cos\alpha / (2\ I) + (4\ F \cos\alpha)(1 - 4\ x2^2 / d^2) / (3\ S)$

$\sigma 13 = x3\ F\ D \cos\alpha / (2\ I)$

où $\sigma 11$ est orthogonale à la section s et $\sigma 12$ et $\sigma 13$ sont dans le plan de la section droite.



On obtient avec $I = \pi\ d^4 / 32$ et $J = \pi\ d^4 / 64$:

- $\sigma 11max = (16\ F\ D \sin\alpha).(1 + 1/4 \times d/D) / (\pi\ d^3)$ qui correspond à x3 = -d/2
- $\tau max = (8\ F\ D \cos\alpha).(1 + 2/3 \times d/D) / (\pi\ d^3)$ qui correspond à x2 = 0 et x3 = -d/2

En conclusion, la contrainte prépondérante est τmax lorsque l'angle d'enroulement est faible ($\alpha < 7.5°$). Pour les ressorts de compression, il faut donc veiller à ne pas dépasser la contrainte de torsion ou de cisaillement. En pratique, la contribution de l'effort tranchant (second terme des parenthèses) est prise en compte dans le coefficient de correction de contrainte.

2.2. Coefficient de correction de contrainte

La base du calcul des contraintes dans le corps du ressort ne tient pas compte de la courbure du fil (le ressort est assimilé à une barre droite). L'effet de courbure induit en particulier un écart de longueur sensible entre la fibre intérieure et la fibre extérieure du ressort. On observe ainsi une irrégularité de la répartition des contraintes dans la section du fil. La contrainte la plus élevée, se trouve sur l'enveloppe interne des spires du ressort.

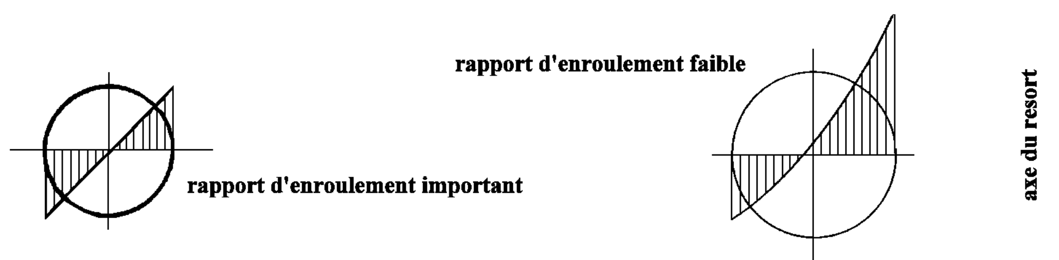


Figure 9 :Répartition des contraintes de cisaillement

La théorie des ressorts étant basée sur une géométrie simplifiée du ressort, il convient d'utiliser un coefficient de correction de contrainte pour améliorer la précision du calcul. Comme le montre la Figure 9, la différence dans les niveaux de contrainte est accentuée lorsque le rayon de courbure est petit. Le coefficient de correction k est ainsi défini en fonction du rapport d'enroulement. La littérature fournit de nombreuses formulations de ce coefficient. Elles donnent des résultats équivalents.

Pour la norme DIN : $k = \dfrac{w + 0.5}{w - 0.75}$

2.3. Conclusion

Un ressort de compression doit donc être dimensionné pour que la contrainte corrigée maximale ne dépasse pas la contrainte de cisaillement maximale admissible dans le corps du ressort τzul.

Dans cette étude: τzul = 50% Rm pour l'acier et τzul = 48%Rm pour l'inox.

3. LA RAIDEUR DU RESSORT

L'étude des contraintes dans le fil a montré que celui-ci est principalement soumis à de la torsion. Nous pouvons donc étudier la déformation engendrée pour calculer la raideur globale du ressort.

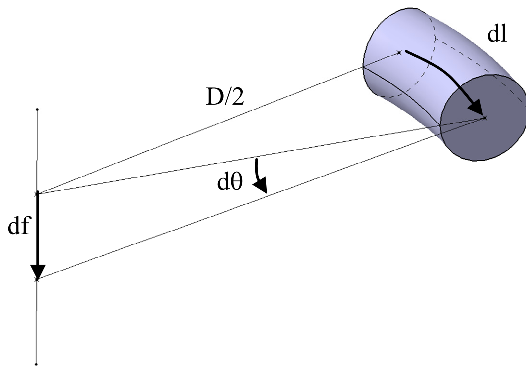


Figure 10 : Déformation d'une portion de spire

Chaque portion de spire dl est soumise à Mt (torsion) et tourne de dθ :

$$d\theta = Mt /(G\ Io)\ dl$$

avec $Mt = F\ D/2$ et $Io = \pi\ d^4/32$

Cela engendre un déplacement axial

$$df = D/2\ d\theta$$

En intégrant sur la longueur du ressort on obtient :

$$f = 8\ D^2\ F /(\pi\ G\ d^4)\ L$$

On peut considérer que $L= n\ \pi\ D$ où n est le nombre de spires actives

On obtient finalement : $f = F\ 8\ n\ D^3 / (G\ d^4)$

D'où la formule de souplesse du ressort :

$$S = 8\ n\ D^3 / (G\ d^4)$$

Ainsi que son inverse, la raideur :

$$R = G\ d^4/ (8\ n\ D^3)$$

4. L'ANGLE D'ENROULEMENT DES SPIRES

Il existe de nombreuses considérations possibles pour la gestion de l'angle d'enroulement des spires. La méthode générale consiste à considérer des **ressorts à spires serrées** pour rester dans les limites des hypothèses de calcul de la raideur et des contraintes dans le corps du ressort. La limite supérieure souvent utilisée est 7.5°. Une valeur approchée de cette limite peut être obtenue en considérant que le pas du ressort ne doit pas dépasser le diamètre moyen divisé par 2.5 : **$m < D / 2.5$**.

On peut relâcher cette contrainte dans certains cas en acceptant des angles plus importants, mais seulement si la contrainte de cisaillement dans le corps du ressort reste faible devant la limite acceptable. Une valeur approchée de la raideur du ressort peut être alors utilisée pour tenir compte de l'influence de l'angle d'enroulement : $R = G\ d^4 / [8\ n\ D^3 \cos(z)]$.

5. LES EXTREMITES ET LES SPIRES MORTES

Il existe de nombreuses configurations possibles pour les extrémités des ressorts de compression. La Figure 11 décrit les quatre plus courantes.

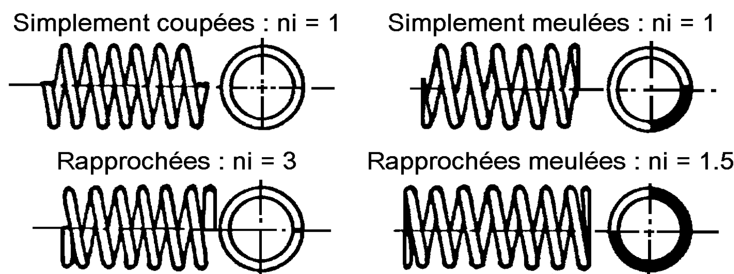


Figure 11 : Extrémités des ressorts de compression

La prise en compte des extrémités se fait notamment lors du calcul de la longueur libre (L0) du ressort à l'aide du coefficient ni. Les extrémités simplement coupées et simplement meulées doivent être évitées autant que possible car elles causent un déséquilibre dans l'application de la force qui se trouve alors décalée par rapport à l'axe du ressort. Les extrémités à **préférer** sont les **extrémités rapprochées et meulées** (*closed and ground ends*) qui permettent de bien appliquer les efforts. Pour les petits ressorts, le meulage n'est parfois pas possible, il vaut mieux alors utiliser des extrémités rapprochées.

Ces extrémités peuvent être personnalisées en rajoutant un certain nombre de **spires mortes** (nm). Ce sont des spires jointives qui permettent d'augmenter la longueur d'un ressort sans changer sa raideur. Elles permettent aussi de diminuer les possibilités d'enchevêtrement des ressorts dans les boîtes. Cela évite des problèmes en production lors par exemple de l'utilisation de bols vibrants pour acheminer les ressorts vers le mécanisme fabriqué (les spires mortes sont alors parfois placées au centre du corps du ressort).

6. LE RAPPORT D'ENROULEMENT

Le rapport d'enroulement w (encore appelé index ou indice du ressort) est le rapport entre le diamètre moyen du ressort et le diamètre du fil. Les fabricants **préconisent** d'utiliser une valeur comprise **entre 8 et 10** pour faciliter la fabrication du ressort. La **norme DIN** indique que le rapport d'enroulement doit toujours être compris entre **4 et 20**. En effet, pour des grandes valeurs de w, le fil est très peu déformé et cela entraîne de grosses dispersions dans la géométrie du ressort. Un rapport d'enroulement très faible induit de fortes contraintes internes lors de la fabrication et augmente les concentrations de contraintes en utilisation : le ressort est fragilisé, le fil peut casser lors de la fabrication, les contraintes admissibles sont plus faibles.

7. LE FLAMBAGE DU RESSORT (*buckling*)

Les ressorts de compression peuvent être sujets au flambage. D'une façon classique, la longueur du ressort de compression diminue sous l'effet d'une charge axiale. En dessous d'une longueur critique, certains ressorts peuvent fléchir latéralement au lieu de continuer de diminuer de longueur : c'est le flambage. La longueur en dessous de laquelle apparaît le phénomène est appelée longueur critique de flambage LK.
Un ressort de compression doit être dimensionné de façon à ce qu'il ne flambe pas latéralement au cours de son utilisation. En utilisant le ressort à des longueurs supérieures à LK, il n'y a pas de problème de flambage. La longueur critique de flambage LK est fonction de la géométrie du ressort (L0/D) ainsi que du type d'appuis du ressort. LK est donc indépendante de la contrainte maximale théoriquement acceptable dans le corps du ressort. La norme DIN recense 5 cas d'appuis. Elle associe à chacun d'eux une valeur différente du coefficient d'assise ν (Figure 12).

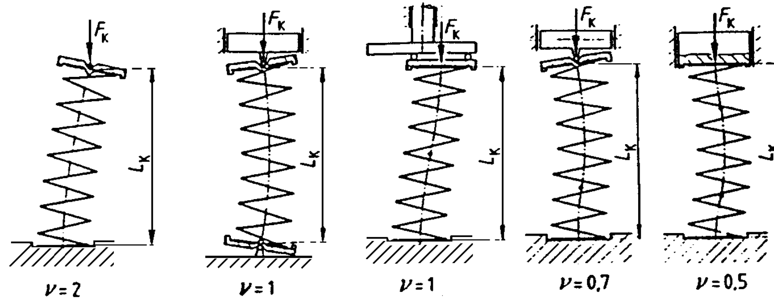


Figure 12 : Coefficient d'assise (DIN)

La longueur critique LK peut être déterminée à partir de l'abaque de la Figure 13 ou bien à partir de la formulation suivante (norme DIN) :

Si $\nu\, L0 / D < \pi\sqrt{\dfrac{2\mu+1}{\mu+2}}$ Alors LK = 0 (pas de risque de flambage)

Sinon $LK = L0\left\{1-\dfrac{\mu+1}{2\mu+1}\left[1-\sqrt{1-\dfrac{2\mu+1}{\mu+2}\left(\dfrac{\pi D}{\nu L0}\right)^2}\right]\right\}$ avec $\mu = \dfrac{E}{2G}-1$ (coef. de poisson)

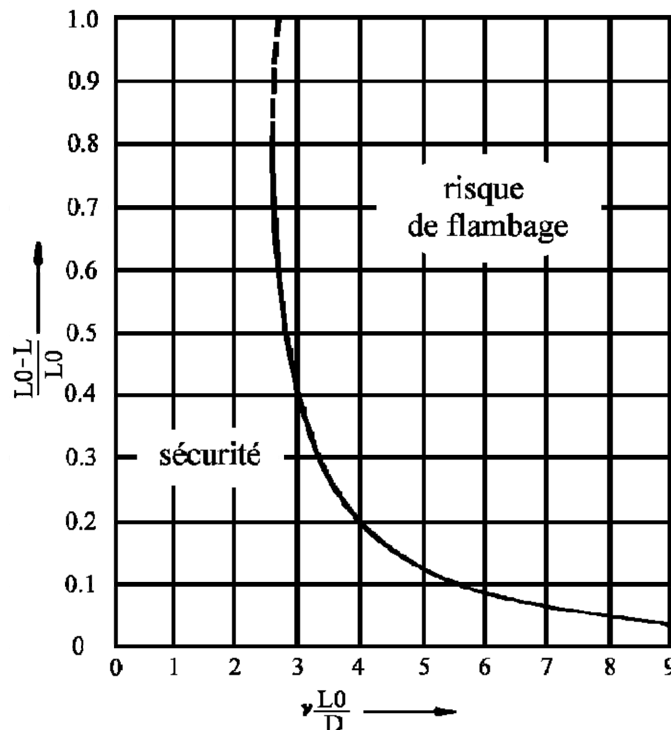


Figure 13 : Courbe de flambage (DIN)

Les ressorts pour lesquels il n'est pas possible d'assurer la résistance au flambage doivent être maintenus dans un alésage ou par un axe. Mais il se produit alors un frottement et une diminution de la résistance à la fatigue.

8. LA TENUE A LA FATIGUE

Sous l'action de charges répétées ou alternées, la rupture d'un matériau peut se produire sous des contraintes inférieures à la résistance du matériau en statique : c'est la rupture en fatigue. Cette rupture vient principalement de fissures microscopiques qui apparaissent dans le matériau dès les premiers cycles de chargement et qui progressent doucement à chaque fois que l'on sollicite le matériau. Il existe de nombreuses courbes pour définir la durée de vie en fatigue d'un matériau. Ces courbes sont issues de campagnes d'essais et reflètent le comportement statistique du matériau, elles sont souvent tracées à 90% de probabilité de résistance.

8.1. La courbe de Wohler

On trace sur la courbe de Wohler ou courbe S.N. (*Stress-Number of cycles*) l'amplitude de la contrainte de cisaillement alternée en fonction du nombre de cycles à la rupture. La contrainte moyenne est nulle.

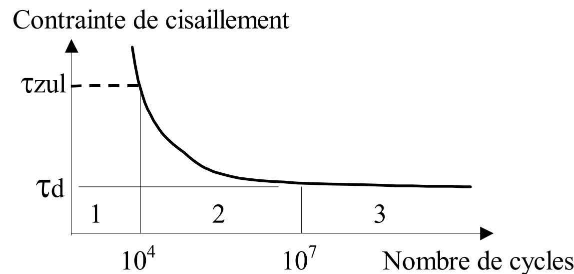


Figure 14 : Courbe de Wohler

On distingue trois zones sur la courbe de Wohler (Figure 14) :

1. La zone de fatigue oligocyclique, sous forte contrainte, la rupture survient après un très petit nombre d'alternances et est précédée d'une déformation plastique notable. En conception, on utilise alors la limite élastique en statique (tracée en pointillés).
2. La zone de fatigue (ou endurance limitée), où la rupture est atteinte après un nombre de cycles qui croit quand la contrainte décroît.
3. La zone d'endurance illimitée (ou zone de sécurité), sous faible contrainte, pour laquelle la rupture ne se produit pas avant 10^7 cycles et reste supérieure à la durée de vie envisagée pour la pièce.

8.2. Le diagramme de Goodman.

Pour un nombre de cycles donné N, on trace la courbe représentant la contrainte maximale acceptable avant rupture en fonction de la contrainte minimale (Figure 15).

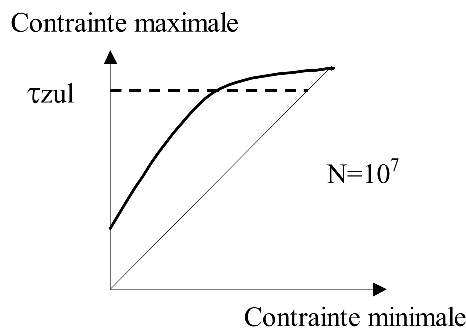
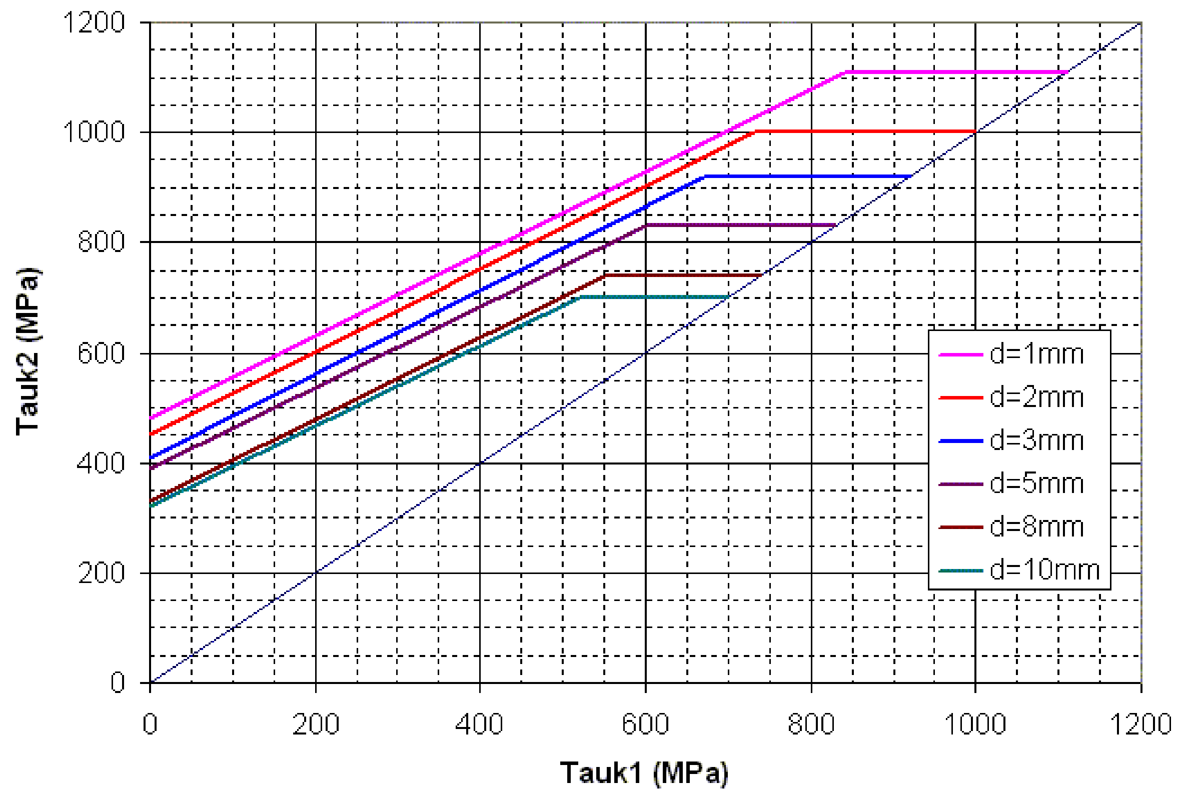
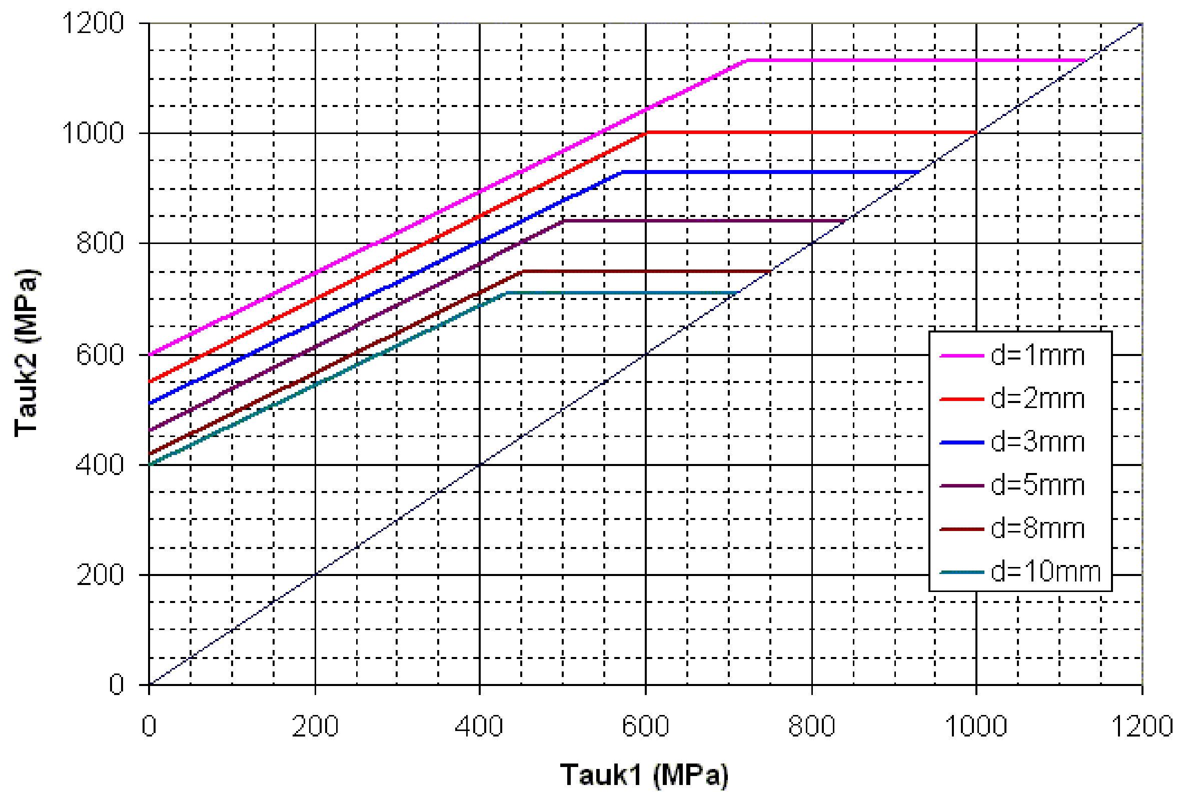


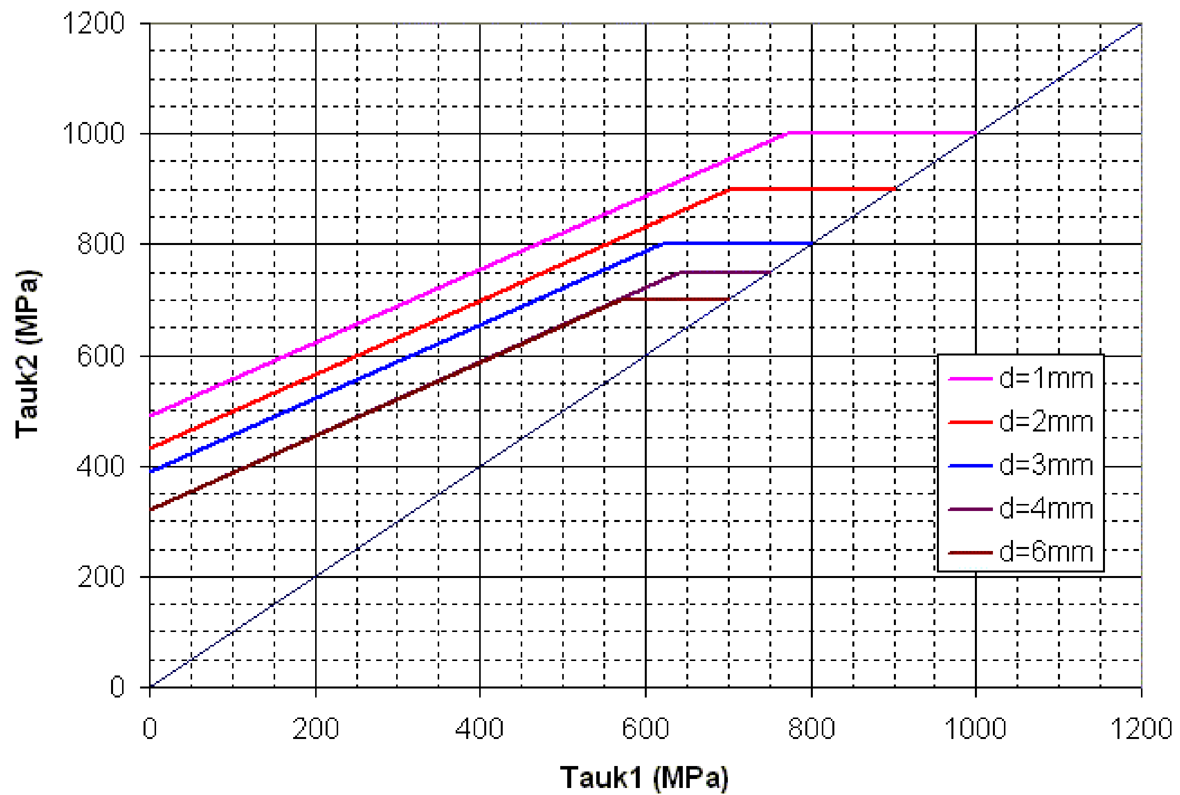
Figure 15 : Diagramme de Goodman

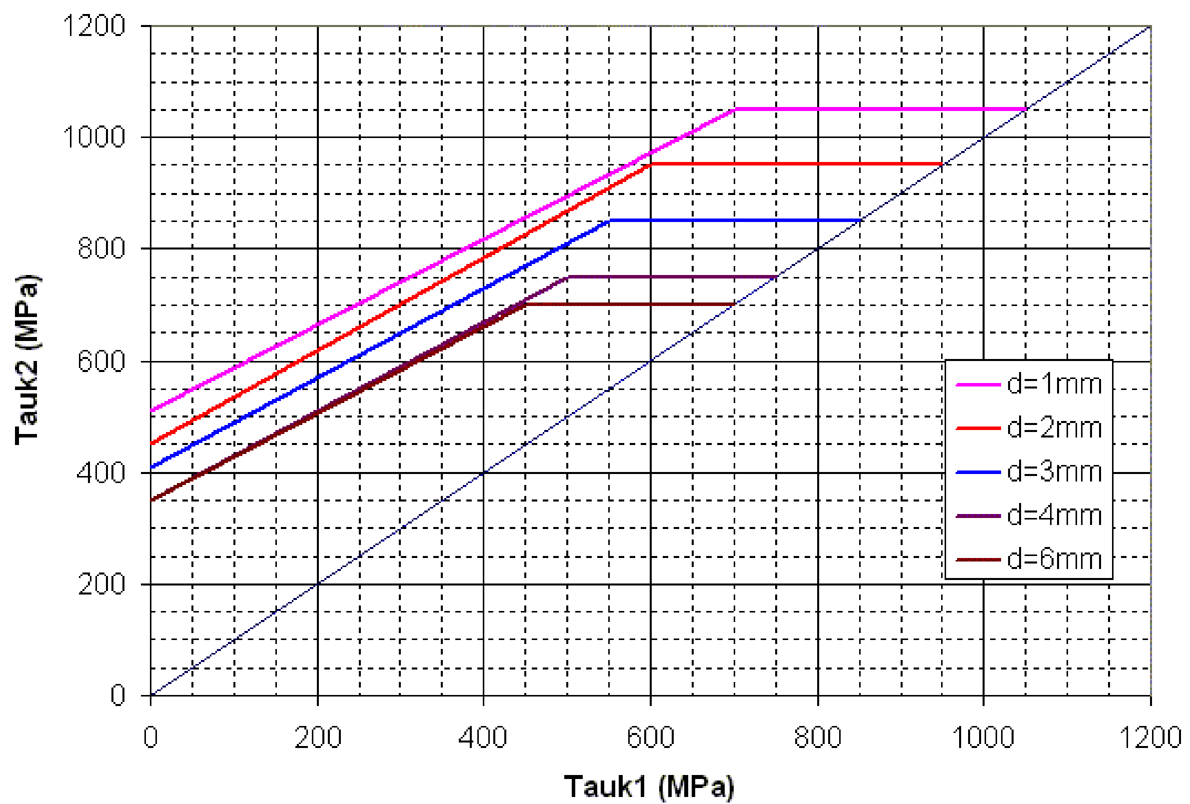
Un point de fonctionnement est acceptable s'il reste en dessous de la courbe limite. La zone acceptable est toujours restreinte par la limite élastique en statique (en pointillés). Le diagramme étant en effet tracé en fonction de la rupture du matériau, la contrainte maximale est limitée à la contrainte statique maximale acceptable de manière à éviter une déformation du matériau dès les premiers cycles de fonctionnement.
Remarque : pour que les notions de durée de vie restent valides, il faut veiller à éviter les problèmes de corrosion et de frottement sur les côtés du ressort.

Pour les ressorts de compression, la norme DIN fournit les diagrammes de Goodman pour les aciers et les inox courants (grenaillés et non grenaillés) pour 10^7 cycles. Les figures suivantes présentent un aperçu de ces diagrammes.


Acier DH non Grenaillé
Tauk2 (MPa)
0
200
400
600
800
1000
1200
Tauk1 (MPa)
d=1mm
d=2mm
d=3mm
d=5mm
d=8mm
d=10mm


Acier DH Grenaillé
Tauk2 (MPa)
0
200
400
600
800
1000
1200
Tauk1 (MPa)
d=1mm
d=2mm
d=3mm
d=5mm
d=8mm
d=10mm


Inox 1.4310 non Grenaillé
Tauk2 (MPa)
Tauk1 (MPa)
0
200
400
600
800
1000
1200
d=1mm
d=2mm
d=3mm
d=4mm
d=6mm


Inox 1.4568 non Grenaillé
Tauk2 (MPa)
Tauk1 (MPa)
0
200
400
600
800
1000
1200
d=1mm
d=2mm
d=3mm
d=4mm
d=6mm

9. LA LONGUEUR MINIMALE DE FONCTIONNEMENT

Ln est la longueur minimale de fonctionnement basée sur des considérations géométriques (il n'y a pas d'évaluation de contrainte à ce niveau). En effet, les dispersions lors de la fabrication du ressort font que certaines spires vont se toucher avant la longueur théorique à spires jointives (Lc) entraînant une augmentation de la raideur et des efforts. La caractéristique du ressort n'est alors plus linéaire. Comme les calculs sont déterminés à partir de cette hypothèse et qu'il est généralement souhaitable d'éviter les contacts entre les spires durant le fonctionnement, la longueur de travail est limitée à une valeur supérieure à la longueur théorique à spires jointives. Il existe plusieurs approches pour déterminer la valeur de Ln.

La norme DIN demande de respecter un espace minimal entre les spires à partir de la valeur de Sa :

$$Ln = Lc + Sa \text{ avec } Sa = n\,(0.0015\, D^2 / d + 0.1d)$$

Dans le cas d'une application dynamique, lorsque $N > 10^4$, Sa est multiplié par 1.5

L'IST (Institute of Spring Technology) propose une autre approche en considérant un pourcentage de la course maximale théorique jusqu'à la longueur à spires jointives. On a ainsi : Ln = Lc + 0.15 (L0 - Lc)

Dans des cas particuliers où l'on ne souhaite pas avoir de précision particulière sur l'effort maximal, on peut ne pas considérer ses limitations. Dans ces cas on a simplement Ln = Lc. Attention toutefois, dans la pratique le ressort arrive généralement à bloc à une longueur légèrement supérieure à Lc.

10. LA CONTRAINTE A SPIRES JOINTIVES

Dans une conception simple, le matériau reste dans le domaine élastique même lorsque le ressort est amené à spires jointives. De cette manière, le ressort n'est pas endommagé même si la longueur minimale de fonctionnement L2 sort du domaine initialement prévu.

Par contre, dans le cas où il est certain qu'aucun élément extérieur ne changera le fonctionnement initialement prévu, la rupture (théorique) du ressort à spires jointives peut être acceptée.

Il existe une autre gestion possible de cette contrainte : la préconformation. Cette opération permet d'augmenter artificiellement le niveau de contrainte admissible du ressort. Dans ce cas, le ressort est volontairement dimensionné de manière à ce que la contrainte à spires jointives soit légèrement supérieure à la limite élastique. La figure 15 décrit le phénomène survenant lorsqu'on dépasse légèrement la limite élastique du matériau puis que l'on revient à un chargement nul (la préconformation).

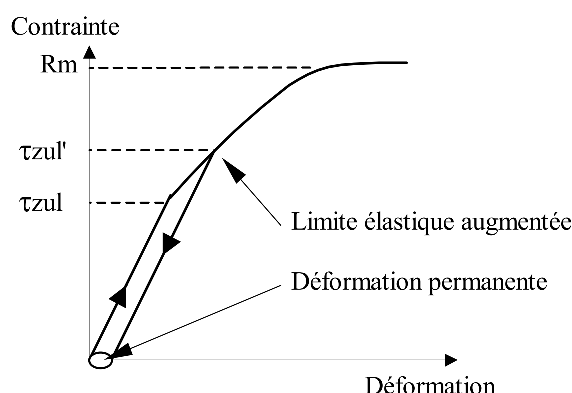


Figure 16 : Préconformation d'un ressort

Le ressort est ainsi amené à spires jointives juste après fabrication, le matériau se déforme plastiquement et sa limite élastique augmente. Malheureusement, il n'y a pas à l'heure actuelle de courbes ou de formules qui permettent d'anticiper précisément la déformation permanente dans le ressort après qu'il ait été déformé plastiquement (évaluation de la perte de longueur). Ce procédé ne sera donc pas exploité entièrement. Le concepteur aura le choix de définir la limite acceptable qu'il souhaite. En cas de dépassement de la limite élastique à spires jointives, la longueur libre du ressort ne sera pas modifiée et restera à sa valeur initiale. Il faudra donc s'attendre à une perte de longueur en fonctionnement qui devra être déterminée expérimentalement.

En conclusion, on conçoit le ressort pour que la contrainte théorique à spires jointives ($\tau kc^{théo}$) ne dépasse pas la limite τkc^S.

Les valeurs de τkc^S sont détaillées dans le Tableau 3 pour les aciers et inox utilisés dans cette étude en fonction des effets acceptables lorsque le ressort est à spires jointives.

Tableau 3 : Définition de la valeur de τkc^S

τkc^S	acier	inox
Sans affaissement	0.50 Rm = τzul	0.48 Rm = τzul
Affaissement léger	0.56 Rm	0.56 Rm
Affaissement permanent	0.75 Rm	0.70 Rm
Rupture	∞	∞

D. LES RONDELLES BELLEVILLE (*Belleville springs*)

Lorsqu'on a besoin d'obtenir un grand effort statique pour un encombrement réduit, il est possible d'utiliser la déformation d'éléments mécaniques de raideur supérieure aux ressorts de compression hélicoïdaux. Une application est de ce principe est la rondelle Belleville.

1. DEFINITION

Une rondelle Belleville est un disque plat percé d'un trou, embouti d'une façon conique (légèrement bombée) qui présente à l'état libre l'aspect de la Figure 17.



Figure 17 : Rondelles Belleville

2. DIMENSIONS PRINCIPALES

Les rondelles Belleville sont définies dans la norme NF E 25-104. La Figure 18 présente les dimensions principales définissant leur géométrie.

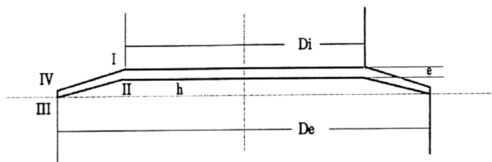


Figure 18 : Rondelle Belleville à l'état libre

De (mm) : diamètre extérieur

Di (mm) : diamètre intérieur

e (mm) : épaisseur

h (mm) : hauteur libre

3. UTILISATION

Les rondelles Belleville permettent de réaliser des ressorts peu encombrants sous de fortes charges. Elles sont souvent utilisées sur des axes de guidages et plaquées entre deux pièces mécaniques plutôt que sur des assemblages boulonnés. Elles doivent reposer sur la circonférence de leur grande base et être chargées uniformément sur la circonférence de leur petite base.

Les rondelles Belleville peuvent être utilisées seules, montées en parallèle (*stacked in parallel*), formant ainsi un paquet de rondelles, (on réalise l'addition des charges élémentaires) ou en opposition (*stacked in series*) (on réalise l'addition des flèches élémentaires). Il existe ainsi un très grand nombre de combinaisons possibles en empilant n rondelles dans le même sens et i paquets de rondelles de sens contraires selon les caractéristiques du ressort que l'on désire obtenir (montages mixtes). Ces divers montages sont illustrés sur la Figure 19.

Cependant, les paquets de plus de trois rondelles sont déconseillés car les frottements entre rondelles deviennent trop importants et la charge varie brusquement à la moindre secousse. On peut également réaliser des ressorts à deux ou trois étages de flexibilité avec des montages en opposition comportant des rondelles d'épaisseurs différentes ou avec des empilements comportant des paquets de rondelles en nombres différents. Il y a alors une mauvaise transmission des efforts et des écarts importants de contraintes entre rondelles ; les calculs ne peuvent en donner qu'une idée approximative.

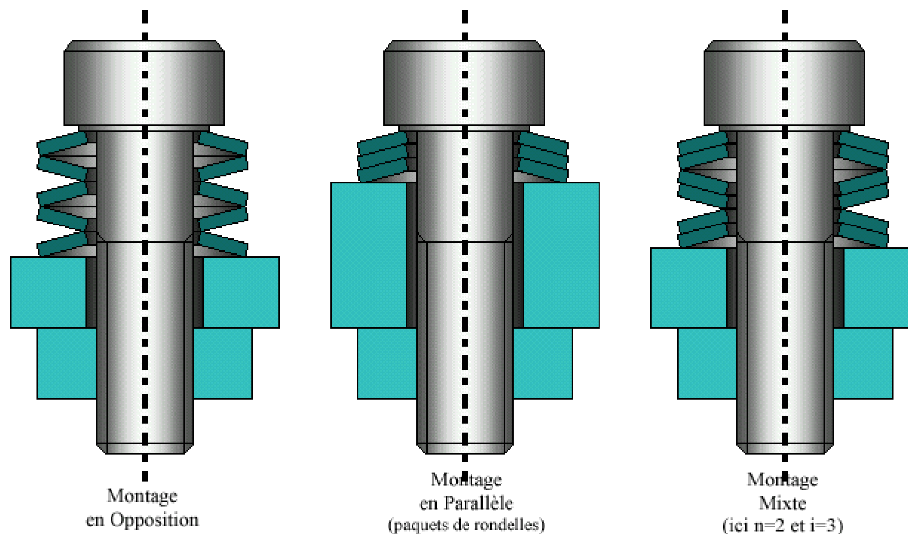


Figure 19 : Différents montages de rondelles Belleville

4. CARACTERISTIQUES

Contrairement aux ressorts de compression hélicoïdaux, les rondelles de Belleville n'ont pas une caractéristique linéaire entre effort et déformée. L'effort F obtenu en fonction de la flèche s peut être calculé à partir de la formule suivante :

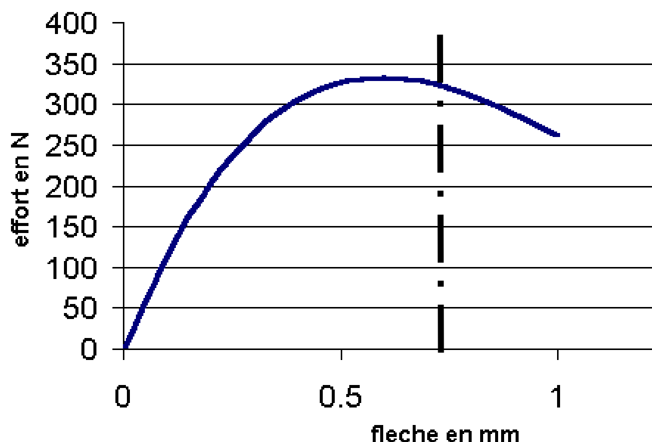
$$F = 4\frac{E}{(1-\mu^2)\,\alpha De^2}\cdot s\cdot e\cdot\left[(h-s)\,\left(h-\frac{s}{2}\right)+e^2\right]$$

Avec

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\frac{\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)^2}{\frac{\delta+1}{\delta-1}-\frac{2}{\ln\delta}}$$

F (N) : effort
s (mm) : flèche
μ : coefficient de poisson
E (N/mm^2) : module d'Young
δ = De / Di

D'une manière générale, pour que les formules de calculs restent valables, il faut que les rondelles Belleville ne travaillent pas au delà des ¾ de la flèche maximale possible (sinon, les appuis ne se font pas correctement sur les arêtes).
Un exemple de caractéristique est décrit sur la figure ci-dessous.



Données
μ : 0.3
E : 210000 N/mm^2
De : 25 mm
Di : 12.2 mm
e : 0.50 mm
h : 1.00 mm

Figure 20 : Exemple de caractéristique d'une rondelle Belleville

Au fur et à mesure de l'augmentation de la flèche (*deflexion*), on observe clairement une première zone où la raideur est importante, puis une deuxième zone où l'effort varie peu en fonction de la flèche et enfin une décroissance de l'effort (cette dernière zone peut ne pas apparaître suivant la géométrie retenue).

Pour un montage en parallèle de *n* rondelles, la charge totale Q peut être considérée comme la somme des efforts sur chaque rondelle d'où Q = *n* F.
On peut être plus précis en intégrant le frottement : $Q = n\,F\,(1 \pm k\,n^2)$ avec k allant de 0.02 à 0.03.

5. CONTRAINTES

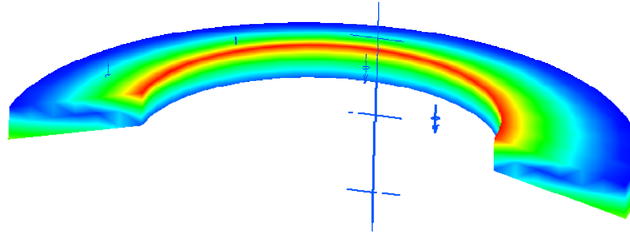


Figure 21 : Aperçu de la répartition de contraintes dans une rondelle soumise à une charge axiale

Il est possible de calculer les contraintes internes aux points indiqués sur la Figure 18.

Point I :

$$\sigma_I = \frac{4E}{(1-\mu^2)\,\alpha De^2}\cdot s\cdot\left[-\beta\left(h-\frac{s}{2}\right)-\gamma\cdot e\right]$$

Point II :

$$\sigma_{II} = \frac{4E}{(1-\mu^2)\,\alpha De^2}\cdot s\cdot\left[-\beta\left(h-\frac{s}{2}\right)+\gamma\cdot e\right]$$

Point III :

$$\sigma_{III} = \frac{Di}{De}\,\frac{4E}{(1-\mu^2)\,\alpha De^2}\cdot s\cdot\left[(2\gamma-\beta)\left(h-\frac{s}{2}\right)+\gamma\cdot e\right]$$

Point IV :

$$\sigma_{IV} = \frac{Di}{De}\,\frac{4E}{(1-\mu^2)\,\alpha De^2}\cdot s\cdot\left[(2\gamma-\beta)\left(h-\frac{s}{2}\right)-\gamma\cdot e\right]$$

Avec

$$\beta = \frac{6}{\pi\ln\delta}\left(\frac{\delta-1}{\ln\delta}-1\right)$$

$$\gamma = \frac{6}{\pi\ln\delta}\,\frac{\delta-1}{2}$$

Pour un calcul statique, la contrainte la plus importante est située au point I. Une plastification est couramment admise et entraîne une limite acceptable très élevée de l'ordre de 2500 à 3000 MPa pour des aciers fortement alliés et de faible épaisseur, la limite descend à 1400 MPa pour des aciers courants.

Pour un calcul en fatigue, il faut calculer la contrainte au point II pour les positions hautes et basses de la rondelle. La figure ci-dessous permet placer le point de fonctionnement obtenu et de vérifier qu'il est acceptable. Il faut procéder de même avec la contrainte au point III.

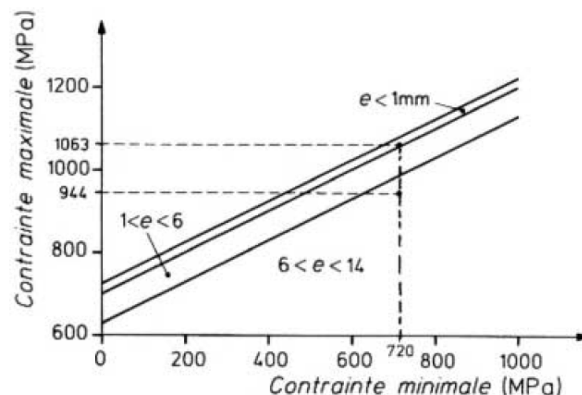


Figure 22 : Limites de fatigue pour aciers avec 2.10^6 cycles et 99% de probabilité de tenue (DIN 2092).

E. AUTRES TYPES DE RESSORTS

Il existe une multitude d'autres types de ressorts. Toutes les formes et géométries sont possibles. Voici une présentation rapide des 2 autres types de ressorts couramment rencontrés, les ressort cylindriques à fil rond de traction et de torsion.

1. RESSORT DE TRACTION (*helical traction spring*)

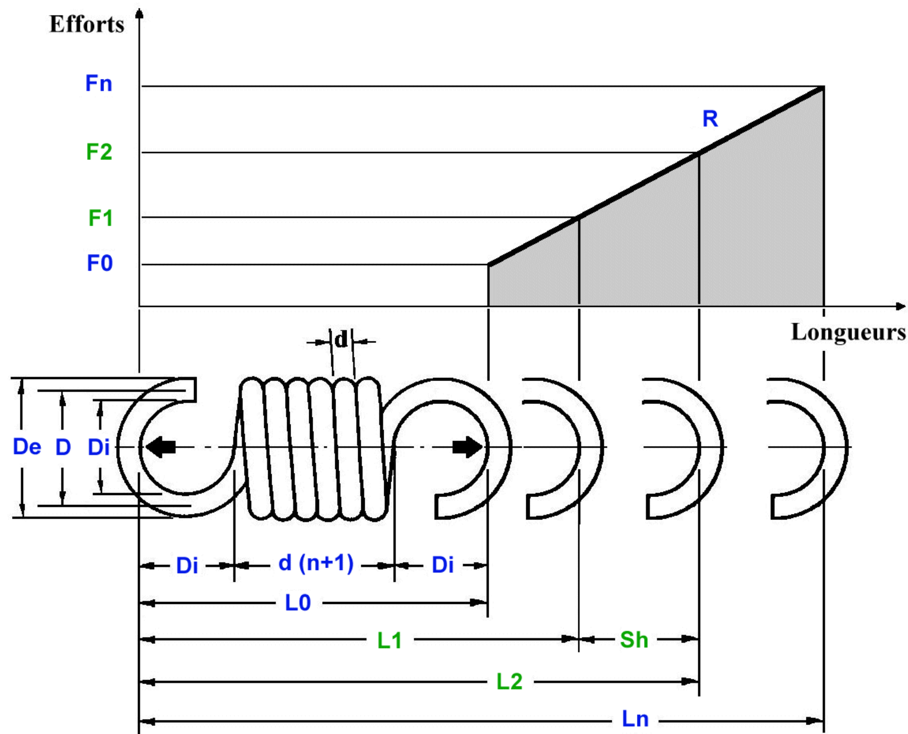


Figure 23 : Ressort de traction hélicoïdal à fil rond

Contrairement aux ressorts de compression, les ressorts de traction ont une caractéristique théorique qui ne passe pas par l'effort nul. Il existe une tension initiale (*initial tension*), le ressort est précontraint. Les normes de calculs proposent des valeurs acceptables pour l'effort associé F0.

Il y a plusieurs types d'extrémités (*end loops*) possibles, les plus courantes sont les boucles allemandes et anglaises.

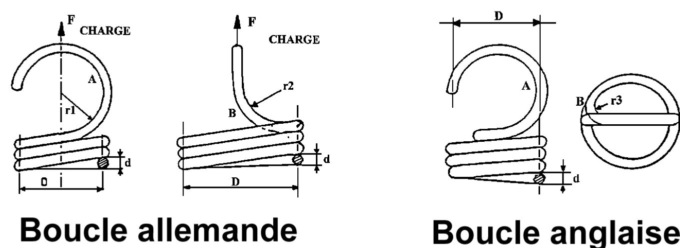


Figure 24 : Extrémités classiques des ressorts de traction

Compte tenu de l'influence de la raideur des boucles au voisinage de F0, il est conseillé de prévoir F1 strictement supérieur à F0 (on peut utiliser F1 > 1.15 F0).

De la même manière que pour les ressorts de compression, la contrainte principale dans le corps du ressort est la contrainte de cisaillement. Le calcul de la raideur est donc similaire. Il est simplement conseillé de rajouter une spire utile dans le calcul de la raideur pour prendre en compte la souplesse des boucles : $R = G\ d^4 / [8\ (n+1)\ D^3]$

La rupture du ressort de traction a souvent lieu au niveau de la jonction entre la boucle et le corps. D'après une étude de l'IST, pour garantir la tenue du ressort, il suffit de limiter l'effort maximal à 75% de la limite théorique pour le corps. On obtient ainsi la formule suivante : $\tau k2 = 8\ D\ F2\ k / \pi / d^3 \leq 0{,}75\ \tau zul$.

2. RESSORT DE TORSION (*helical torsion spring*)

Les ressorts de torsion sont souvent utilisés pour transmettre un couple entre 2 organes mécaniques. Pour tenir en position, le ressort de torsion est généralement guidé par l'intérieur à l'aide d'un arbre. Le corps du ressort est généralement conçu à spires jointives, sans précontrainte. Les extrémités utilisées sont souvent adaptées au mécansime étudié et leur raideur influe sur la raideur globale du ressort.

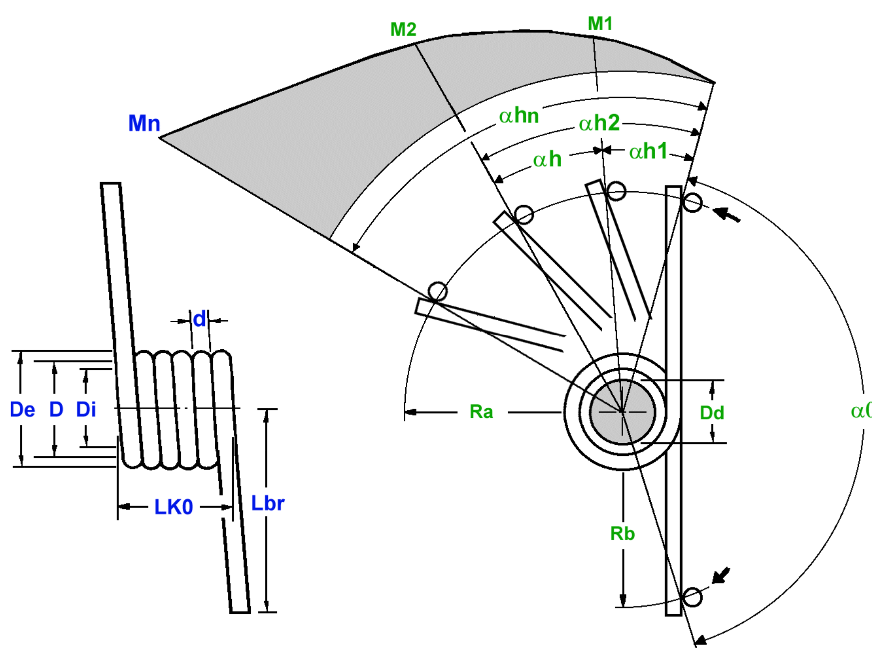


Figure 25 : Ressort de torsion hélicoïdal à fil rond

La sollicitation principale dans le corps du ressort est cette fois de la flexion, ce qui amène une contrainte normale. Les calculs statiques sont donc adaptés en conséquence. Du fait des frottements du ressort sur l'axe et sur les branches, la tenue en fatigue est difficile à mettre en place.

Tableau 4 : Nomenclature et formules de base des ressorts de torsion

Symboles	Unité	Désignation	*English*	Formules
E	N/mm^2	Module d'élasticité du matériau	*Young's modulus*	
M1, M2	N.mm	Moment du ressort, rapportées aux angles α1, α2	*Torques*	$M1 = R\ (\alpha 1 - \alpha 0)$ $M2 = R\ (\alpha 2 - \alpha 0)$
Mn	N.mm	Moment maximal admissible	*Maximal torque*	$Mn = \dfrac{\pi\ d^3\ \sigma zul}{32\ q}$
n	-	Nombre de spires utiles	*Active coils*	
q	-	Coefficient de contrainte en fonction du rapport d'enroulement		$q = \dfrac{w + 0.07}{w - 0.75}$
R	N.mm/°	Raideur du corps du ressort	*Spring rate*	$R = E\ d^4 / (3667\ n\ D)$
w	-	Rapport d'enroulement	*Spring index*	$w = D / d$
α0	°	Angle initial entre les appuis	*Free angle*	
α1, α2	°	Angles du ressort en charge, rapportés aux moments M1, M2	*Angles*	$\alpha 1 = M1 / R + \alpha 0$ $\alpha 2 = M2 / R + \alpha 0$
αn	°	Plus grand angle de travail admissible		$\alpha n = Mn / R + \alpha 0$
σ2	N/mm^2	Contrainte de flexion au point 2	*bending stress*	$\sigma 2 = 32\ q\ M2 / (\pi\ d^3)$
σzul	N/mm^2	Contrainte de flexion maximale admissible		$\sigma zul = 0{,}70\ Rm$

F. EXERCICE D'ANALYSE

On propose d'évaluer les caractéristiques d'un ressort cylindrique de compression que vous auriez à disposition.

Vous pouvez facilement connaître le nombre total de spires ainsi que le type d'extrémités utilisées. A l'aide d'un pied à coulisse, vous mesurez ces dimensions principales : d, De, L0. Enfin, il reste éventuellement à faire l'hypothèse du matériau utilisé.

Avec cette approche, voici des données à traiter :

Nt :
Extrémités :
d :
De :
L0 :
Matériau :

A partir de ces informations, vous pouvez calculer un certain nombre de caractéristiques pour ce ressort.

1. UTILISATION STATIQUE

Q1 : Déterminez la raideur R.

Q2 : Déterminez la longueur à spires jointives Lc.

Q3 : Déterminez l'effort théorique à spires jointives.

Q4 : Le ressort aura-t-il tendance à flamber?

Les appuis amènent ν =

Q5 : Le ressort se déformera-t-il plastiquement à spires jointives?

2. UTILISATION DYNAMIQUE

Pour cette deuxième partie, il est nécessaire de connaître les 2 points de fonctionnement du ressort (L1, L2, F1, F2, ou Sh)

Point1 :
Point2 :

Q6 : Déterminez les autres caractéristiques parmi : L1, L2, F1, F2, ou Sh

Q7 : Déterminez la longueur minimale de fonctionnement Ln (méthode DIN en dynamique). Conclusions.

Q8 : Pourra-t-il être utilisé 10^7 cycles?

Q9 : Déterminez la fréquence propre du ressort.

G. BIBLIOGRAPHIE

1. NORMES PRINCIPALES POUR LES RESSORTS

- DIN 2088, DIN 2089
- NF EN 13906, NF EN 10270, NF EN 12166.

2. OUVRAGES DE REFERENCE

- Wahl, A. M., 1963, Mechanical Springs, McGraw-Hill Book Company, New York, Subsequent printings, Spring Manufacturers Institute, Oak Brook, IL. (**LA** bible sur les ressorts)
- IST, 1980 - 2005, "Essential Spring Design Training Course", handbook, The Institute of Spring Technology, Sheffield, United Kingdom.
- Michel Duchemin, « Ressorts metalliques, contraintes de traction ou de compression», Techniques de l'Ingénieur B 5 431.
- Michel Duchemin, « Ressorts, force coaxiale», Techniques de l'Ingénieur B 5 435.

3. SITES INTERNET SUR LES RESSORTS

- http://www.meca.insa-toulouse.fr/~paredes/Ressorts
- http://home.earthlink.net/~bazillion/intro.html

4. LOGICIELS INDUSTRIELS

- The 'Advanced Spring Design 6' software du SMI (Spring Manufacturers Institute). http://www.smihq.org
- The 'Spring Design and Validation 7' software de l'IST (Institute of Spring Technology). http://www.ist.org.uk

ÉTUDE DU FRETTAGE (*INTERFERENCE FIT*)

A. PRESENTATION DE L'ASSEMBLAGE

Les surfaces de liaison sont des cylindres de révolution de même diamètre nominal (*basic size*). L'ajustement normalisé correspondant doit être choisi de telle sorte qu'il existe toujours un serrage (*interference*) dans l'assemblage capable ainsi de transmettre un couple.
Ainsi, en fonction des diamètres nominaux, le premier ajustement assurant un serrage au montage est donné dans le Tableau 1.
En annexe se trouve le même tableau détaillé intégrant les valeurs des tolérances pour chaque ajustement préconisé.

Ø	Ajustements (*fits*)		
	H6	H7	H8
$1 \leq d < 3$	r5	s6	u7
$3 \leq d < 6$	r5	r6	s7
$6 \leq d < 18$	n5	r6	s7
$18 \leq d < 140$	n5	p6	s7
$140 \leq d < 450$	n5	p6	r7
$450 \leq d < 500$	p5	p6	r7

Tableau 1 : Exemple d'ajustement assurant un serrage

Exemples: Pour Ø 20 H6, le plus petit arbre assurant un serrage est Ø 20 n5.
Pour Ø 150 H8, c'est l'arbre de Ø 150 r7.

Comme nous le verrons plus loin, de telles liaisons sont capables de transmettre des efforts. Cependant, ***attention les ajustements incertains ne peuvent pas être utilisés pour transmettre des efforts***.

1. CONDITIONS DE REALISATION (*Joining method*). NF E 22 620.

Le frettage est strictement réservé aux assemblages par pénétration cylindrique sans compléments genre clavette (key) ou goupille (round pins).
Les aciers dans lesquels sont réalisés les arbres (*shaft*) et les moyeux (*hub*, *ring or housing*) doivent avoir une limite d'élasticité (*Yield strength*) Re ≥ 400 MPa.
Le diamètre extérieur D du moyeu (*ring outer diameter*) ne doit en aucune section être inférieur à 1,5 d (d = diamètre de l'arbre).
Avant montage, l'arbre et l'alésage doivent présenter un état de surface de rugosité telle que :
$0,2\ \mu m < Ra < 0,8\ \mu m$

II existe deux procédés d'assemblage :

Montage à la presse (*mounting press*) (Figure 1) : emmanchement à force.
La difficulté de mise en place impose un aménagement des extrémités de l'arbre et de l'alésage (*hole*) ainsi qu'une lubrification des pièces avant le montage. Ce procédé simple présente l'inconvénient d'un risque de grippage et une variation de serrage après assemblage.

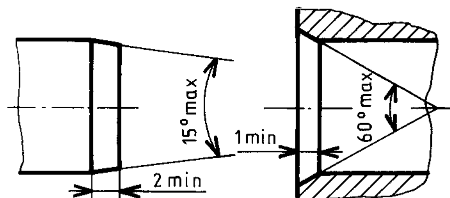


Figure 1 : Exemple d'aménagement des extrémités

Dilatation de l'alésage ou (et) contraction de l'arbre (*Changing the size of the parts heating***)**
En chauffant le moyeu (dans un bain d'huile par exemple), on peut dilater son alésage. En y associant (ou non) le refroidissement de l'arbre (dans un bain d'azote liquide, par exemple, ce qui a pour effet de contracter son Ø), on peut effectuer le montage avec jeu. Le serrage apparaît lorsque l'ensemble est revenu à la même température.
Cependant, les températures atteintes ne doivent pas modifier la structure des matériaux. II ne faut pas dépasser 350 °C dans le cas d'un chauffage.

2. HYPOTHESE DE TRAVAIL

La méthode utilisée constitue l'adaptation de la théorie des enveloppes cylindriques épaisses au cas où :
- l'arbre est creux ou plein ; le moyeu d'épaisseur constante ;

- les pressions extérieures sont nulles ;
- les matériaux de l'arbre et du moyeu sont identiques ou différents ;
- la liaison assure la transmission d'un couple ou d'une poussée axiale ;
- l'arbre et le moyeu sont fabriqués en série ;
- l'assemblage est réalisé par dilatation thermique du moyeu ;
- la vitesse périphérique sur le diamètre extérieur de la frette est inférieure à 20 m/s ;
- le mode d'assemblage est utilisé pour un diamètre d'arbre supérieur ou égal à 50 mm (il est réalisable sur des diamètres inférieurs mais l'I.T. devenant prépondérant par rapport à la valeur du serrage, il est nécessaire d'apparier les pièces à assembler) ;
- les effets du fluage ne sont pas pris en compte.

3. BUT DU CALCUL

- Définir les conditions de résistance de l'arbre et du moyeu (d'après le critère de von Mises).
- Définir les tolérances de l'arbre et du moyeu (diamètre, état de surface et cylindricité).
- Définir les conditions du montage (si l'on choisit d'assembler les deux éléments par dilatation du moyeu).
- Définir les efforts de démontage (à sec et à l'huile).
- Préciser quelques paramètres
  - le couple de calcul (*torque capacity*) ou l'effort de calcul (*load calculation*);
  - la contrainte équivalente maxi dans l'arbre et le moyeu (d'après le critère de Von Mises) ;
  - le serrage dans l'assemblage (mini et maxi) ;
  - la pression de frettage (*fit pressure*) dans l'assemblage (mini et maxi) ;
  - la dilatation, au montage, de l'alésage du moyeu (*deviation for hole or shaft*).

B. MÉTHODE DE CALCUL

1. PRINCIPE DU CALCUL

Principe	Équations
Symétrie de révolution	Coordonnées cylindriques
Relation champ de déplacement (*displacement*) déformation (*strain*)	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ avec : $\overrightarrow{U(M)} = u_r.\vec{e_r} + u_\theta.\vec{e_\theta} + u_z.\vec{e_z}$
Symétrie axiale	$u_\theta = 0$ u_r et u_z indépendant de θ : $\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0$ u_r indépendant de z : $\frac{\partial u_r}{\partial z} = 0$
Section plane reste plane	u_z indépendant de r et de θ
Équations d'équilibres	$\overrightarrow{\text{div}\sigma} + \vec{f} = \rho\vec{\Gamma}$ avec $\vec{f}$: densité volumique des efforts à distance
Loi de comportement linéaire (milieu homogène et isotrope)	$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \cdot \varepsilon_{kk}.\delta_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_{ij}$
Traduction de la loi d'équilibre en ε_{ij} puis U_i	$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0$ (**I**)
Conditions aux limites	$(\sigma_r)_{\rho=r} = -p \qquad (\sigma_r)_{\rho=r} = -p_a \qquad (\sigma_z)_{z=0 \text{ ou } L} = -p_a$
Intégration de (**I**)	$\varepsilon_r = A - \frac{B}{r^2} \qquad \varepsilon_\theta = A + \frac{B}{r^2} \qquad \varepsilon_z = C$
Utilisation des relations σ = σ(ε)	$\sigma_r = \ldots \qquad \sigma_\theta = \ldots \qquad \sigma_z = \ldots$
Avec la relation ε = ε(σ)	Valeur de la pression de contact (*interference contact pressure*) $p = \frac{\Delta}{\frac{d}{E_2}\left(\frac{d^2+d_2^2}{d_2^2-d^2}+\nu_2\right) + \frac{d}{E_1}\left(\frac{d^2+d_1^2}{d^2-d_1^2}-\nu_1\right) + \frac{\Delta}{E_1}\left(\frac{d^2+d_1^2}{d^2-d_1^2}-\nu_1\right)}$

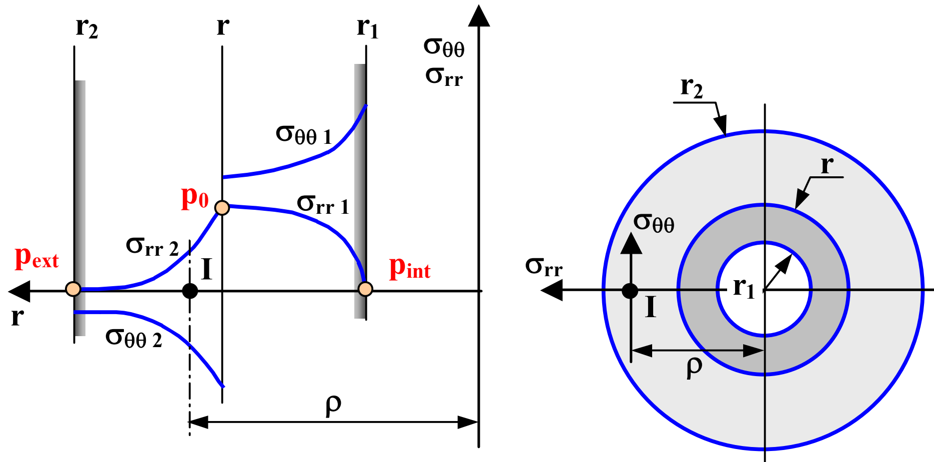


Figure 2 : Distribution des contraintes principales

2. CONDITIONS DE RESISTANCE DE L'ARBRE ET DU MOYEU

2.1. Valeur minimale de la pression de frettage : p_{min}

2.1.1. Cas de la transmission d'un couple C (Figure 3)

On détermine la relation entre le couple C et la pression p. Soit ds un élément de la portée de l'arbre défini par :

$$ds = l\frac{d}{2}d\theta$$

A la limite du glissement l'effort tangentiel transmissible vaut :

$$dT = f.dN = l.f.p\frac{d}{2}d\theta$$

avec f le coefficient de résistance au glissement entre les matériaux constituant l'assemblage.

Le couple élémentaire transmissible $dC = \frac{d}{2}dT = f.p.l.\frac{d^2}{4}\ d\theta$ donne :

$$C = \int_0^{2\pi} f.p.l.\frac{d^2}{4}\ d\theta$$

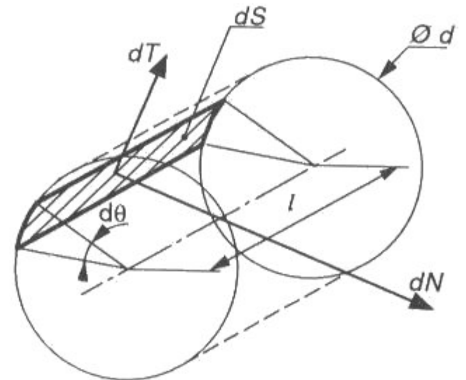


Figure 3 : Calcul du couple C

Dans la pratique, La norme **NF E 22 621**, applique une correction sur le chargement à transmettre. Il est d'usage d'utiliser un couple corrigé par un coefficient de sécurité k suivant la sensibilité du domaine d'application avec : $1 \leq k \leq 3$. Dans ces conditions, l'expression du couple devient : Cc = k.C.

On définit ainsi une expression de p_{min} qui vaut : $p_{min} = \dfrac{2\,k\,C}{\pi\,f\,l\,d^2}$

2.1.2. Cas de la transmission d'un effort axial F_A (Figure 4)

Pour établir la relation entre l'effort transmissible A et la pression p, on considère que la pression de frettage est uniformément répartie sur un élément de surface ds ce qui exerce un effort élémentaire :

$$dN = p.ds = p.l\frac{d}{2}d\theta \qquad \text{avec } ds = l\frac{d}{2}d\theta$$

A la limite du glissement l'effort axial transmissible vaut :

$$dF_A = f.dN = f.p.l\frac{d}{2}d\theta$$

avec f le coefficient de résistance au glissement (*coefficient of friction*) entre les matériaux (*materials*) constituant l'assemblage.

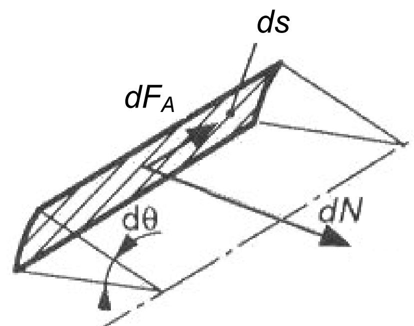


Figure 4 : Calcul de l'effort Axial F_A

L'effort axial transmissible A est défini par :

$$F_A = \int_0^{2\pi} f.p.l.\frac{d}{2}d\theta$$

En tenant compte d'un effort transmissible corrigé ($F_{Ac} = k.F_A$), on définit ainsi une expression de p_{min} qui vaut :

$$p_{min} = \frac{k\, F_A}{\pi\, f\, l\, d}$$

2.2. Valeur minimale du serrage théorique: Δ_{min}

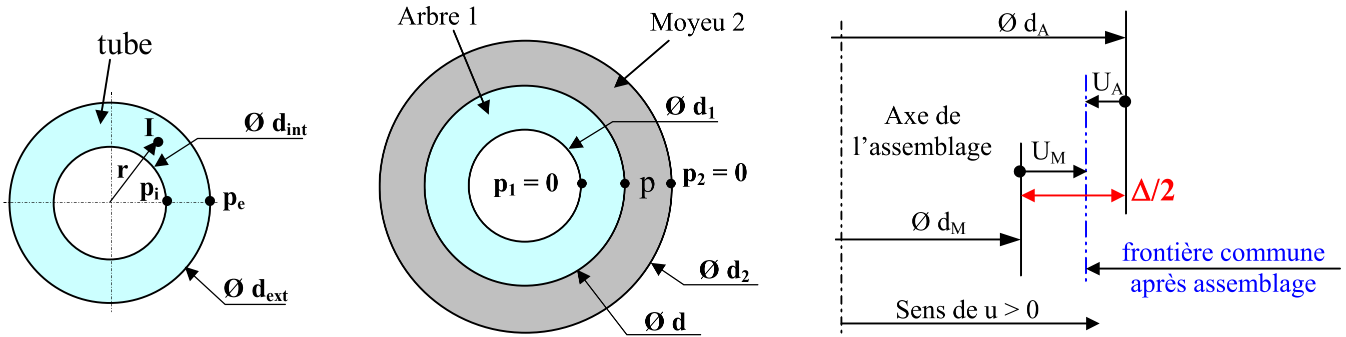


Figure 5 : Serrage théorique Δ_{min}

2.2.1. Détermination du déplacement radial u d'un point I quelconque d'un tube :

$$u_{I(r)} = \frac{1-\nu}{E}\,\frac{d_{int}^2.p_i - d_{ext}^2.p_e}{d_{ext}^2 - d_{int}^2}\cdot r + \frac{1+\nu}{E}\,\frac{d_{int}^2.d_{ext}^2.(p_i - p_e)}{4.\left(d_{ext}^2 - d_{int}^2\right)r}$$

2.2.2. Expression de p_{min} en fonction du serrage minimal Δ

Dans l'interface arbre moyeu, il règne après frettage une pression p inconnue a priori. Pour ce problème, les données sont les dimensions respectives du diamètre intérieur du moyeu. Il s'agit de déterminer à partir de ces données la pression p_{min} (pression de frettage minimale, obtenue dans le cas d'un serrage minimal).

__cas de l'arbre 1__ (hyp : $2r = d_A \approx d$, $p_i = p_0 \approx 0$ et $p_e = p_{min}$)

$$u_{A(r=d/2)} = \frac{1-\nu_1}{E_1}\,\frac{d_1^2.p_1 - d^2.p_{min}}{d^2 - d_1^2}\cdot(d/2) + \frac{1+\nu_1}{E_1}\,\frac{d_1^2.d^2.(p_1 - p_{min})}{4.\left(d^2 - d_1^2\right)(d/2)}$$

$$\boxed{u_{A(r=d/2)} = -\frac{1-\nu_1}{2.E_1}\,\frac{d^3.p_{min}}{d^2 - d_1^2} - \frac{1+\nu_1}{2.E_1}\,\frac{d_1^2.d.p_{min}}{\left(d^2 - d_1^2\right)}}$$

__cas du moyeu 2__ (hyp : $2r = d_M \approx d$, $p_e = p_0 \approx 0$ et $p_i = p_{min}$)

$$u_{M(r=d/2)} = \frac{1-\nu_2}{E_2}\,\frac{d^2.p_{min} - d_2^2.p_2}{d_2^2 - d^2}\cdot(d/2) + \frac{1+\nu_2}{E_2}\,\frac{d^2.d_2^2.(p_{min} - p_2)}{4.\left(d_2^2 - d^2\right)(d/2)}$$

$$\boxed{u_{M(r=d/2)} = \frac{1-\nu_2}{2.E_2}\,\frac{d^3.p_{min}}{d_2^2 - d^2} + \frac{1+\nu_2}{2.E_2}\,\frac{d.d_2^2.p_{min}}{\left(d_2^2 - d^2\right)}}$$

Lorsque $p = p_{min}$, on obtient Δ_{min} par la relation des déplacements soit :

$$\frac{\Delta_{min}}{2} = u_M - u_A$$

On utilise la relation liant p_{min} et Δ_{min} :

$$\boxed{p_{min} = \frac{\Delta_{min}}{\frac{d}{E_2}\left(\frac{d^2 + d_2^2}{d_2^2 - d^2} + \nu_2\right) + \frac{d}{E_1}\left(\frac{d^2 + d_1^2}{d^2 - d_1^2} - \nu_1\right) + \frac{\Delta_{min}}{E_1}\left(\frac{d^2 + d_1^2}{d^2 - d_1^2} - \nu_1\right)}}$$

Remarque : Si p_{max} est un paramètre connue, on peut en déduire un serrage maximal Δ_{max} en remplaçant les valeurs min par les valeurs max dans l'expression précédente.

2.3. Valeur maximale du serrage théorique : Δ_{max}

$$\Delta_{max} = \Delta_{min} + IT_A + IT_M$$

Tolérances fondamentales IT (en micromètres)													
Qualité	*≤3 mm*	*3 à 6*	*6 à 10*	*10 à 18*	*18 à 30*	*30 à 50*	*50 à 80*	*80 à 120*	*120 à 180*	*180 à 250*	*250 à 315*	*315 à 400*	*400 à 500*
5	4	5	6	8	9	11	13	15	18	20	23	25	27
6	6	8	9	11	13	16	19	22	25	29	32	36	40
7	10	12	15	18	21	25	30	35	40	46	52	57	63

Tableau 2 : Tolérances IT

2.4. Valeur maximale de la pression de frettage : p_{max}

$$p_{max} = p_{min} \frac{\Delta_{max}}{\Delta_{min}}$$

2.5. Valeur maximale de la contrainte combinée: $\sigma_{eq\ VM\ max}$ (d'après le critère de Von Mises)

2.5.1. Détermination de la contrainte normale radiale σ_r (radial stress) en un point quelconque I d'un tube :

$$\sigma_{r\ I(r)} = \frac{r_{int}^2 \cdot p_i - r_{ext}^2 \cdot p_e}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} - \frac{r_{int}^2 \cdot r_{ext}^2 \cdot (p_i - p_e)}{\left(r_{ext}^2 - r_{int}^2\right) r^2}$$

2.5.2. Détermination de la contrainte tangentielle σ_t (tangential stress) en un point quelconque I d'un tube :

$$\sigma_{t\ I(r)} = \frac{r_{int}^2 \cdot p_i - r_{ext}^2 \cdot p_e}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} + \frac{r_{int}^2 \cdot r_{ext}^2 \cdot (p_i - p_e)}{\left(r_{ext}^2 - r_{int}^2\right) r^2}$$

Remarque : cas d'un arbre plein ($d_{int} = 0$)

$\sigma_r = -p_e$ $\sigma_t = -p_e$

2.5.3. Expression des contraintes lorsque la pression extérieure (external pressure) est nulle ($p_1 = p_2 \approx 0$)

Soit d_c le diamètre d'une circonférence quelconque au long de laquelle on calcule les contraintes σ_r et σ_t.

cas de l'arbre 1 (hyp : $p_i = p_1 \approx 0$, $p_e = p_{max}$ et $d_1 \le d_{cA} \le d$)

$$\sigma_{r\ A} = \frac{d_1^2 . p_1 - d^2 . p_{max}}{d^2 - d_1^2} - \frac{d_1^2 . d^2 . (p_1 - p_{max})}{\left(d^2 - d_1^2\right) d_{cA}^{\ 2}}$$

$$\boxed{\sigma_{r\ A} = -\frac{d^2 . p_{max}}{d^2 - d_1^2}\left(1 - \frac{d_1^2}{d_{cA}^{\ 2}}\right)}$$

$$\sigma_{t\ A} = \frac{d_1^2 . p_1 - d^2 . p_{max}}{d^2 - d_1^2} + \frac{d_1^2 . d^2 . (p_1 - p_{max})}{\left(d^2 - d_1^2\right) d_{cA}^{\ 2}}$$

$$\boxed{\sigma_{t\ A} = -\frac{d^2 . p_{max}}{d^2 - d_1^2}\left(1 + \frac{d_1^2}{d_{cA}^{\ 2}}\right)}$$

cas du moyeu 2 (hyp : $p_i = p_{max}$, $p_e = p_1 \approx 0$ et $d \le d_{cM} \le d_2$)

$$\sigma_{r\ M} = \frac{d^2 . p_{max} - d_2^2 . p_2}{d_2^2 - d^2} - \frac{d^2 . d_2^2 . (p_{max} - p_2)}{\left(d_2^2 - d^2\right) d_{cM}^{\ 2}}$$

$$\boxed{\sigma_{r\ M} = \frac{d^2 . p_{max}}{d_2^2 - d^2}\left(1 - \frac{d_2^2}{d_{cM}^{\ 2}}\right)}$$

$$\sigma_{t\ M} = \frac{d^2 . p_{max} - d_2^2 . p_2}{d_2^2 - d^2} + \frac{d^2 . d_2^2 . (p_{max} - p_2)}{\left(d_2^2 - d^2\right) d_{cM}^{\ 2}}$$

$$\boxed{\sigma_{t\ M} = \frac{d^2 . p_{max}}{d_2^2 - d^2}\left(1 + \frac{d_2^2}{d_{cM}^{\ 2}}\right)}$$

2.5.4. Expression de la contrainte équivalente $\sigma_{eq\ VM}$

Le critère de Von Mises considère que l'énergie de variation de forme dans la pièce étudiée doit être inférieure à l'énergie de variation de forme, à la limite d'élasticité, lors de l'essai de traction (ou de compression). Ce critère peut se traduire par l'inéquation suivante :

$$\sigma_{eq\ VM} \le \sigma_{ad} = R_e/s \text{ ou } R_{p0,2}/s$$

R_e : limite d'élasticité

$R_{p0,2}$: limite conventionnelle d'élasticité

s : coefficient de sécurité du calcul (s = 1,25 pour le frettage d'après NF E 22-621)

la contrainte équivalente de Von Mises est définie par la relation suivante :

$$\sigma_{eq\,VM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

où σ_1, σ_2, σ_3 sont les contraintes principales, dans la pièce, au point considéré.

Remarque 1 : pour l'étude du frettage en coordonnées cylindriques, la contrainte équivalente vaut :
$\sigma_1 = \sigma_r$
$\sigma_2 = \sigma_t$
$\sigma_3 = \sigma_z$ (dans notre cas $\sigma_z = 0$)

soit : $\sigma_{eq\,VM} = \sqrt{\sigma_r^{\;2}+\sigma_t^{\;2}-\sigma_r.\sigma_t}$

Remarque 2 : Si les conditions de résistance de l'arbre et du moyeu ne peuvent être remplies il est nécessaire :
- de reprendre les calculs en modifiant les dimensions ou les matériaux suivant les possibilités offertes par l'application ;
- ou de renoncer à la solution frettage sur une portée cylindrique.

3. TOLERANCES DE L'ARBRE ET DU MOYEU

3.1. Tolérance de cylindricité : t

Tolérance de cylindricité de l'arbre : $t_A = IT_A/4$ et du moyeu $t_M = IT_M/4$

3.2. État de surface

Ra : écart moyen arithmétique par rapport à la ligne moyenne (*arithmetical average deviation from the mean*).

Arbre et moyeu :
d ≤ 180 mm ; Ra = 0,8 ;
d > 180 mm ; Ra = 1,6.

Soit un lissage de :
5 µm pour d ≤ 180 mm ;
10 µm pour d > 180 mm.

4. CONDITIONS DE MONTAGE (SI L'ON CHOISI D'ASSEMBLER LES DEUX ELEMENTS PAR DILATATION DU MOYEU)

Dans ce contexte d'assemblage, il est primordial de prendre en compte un jeu minimum d'introduction lors de l'assemblage. Ce jeu (*clearance*) doit être évolutif en fonction de la valeur du diamètre de frettage. Le Tableau 3 préconise des valeurs de jeu (j).

Diamètre nominal	Jeu minimum
d ≤ 100	j = 0,15 mm
100 < d ≤ 200	j = 0,20 mm
200 < d	j = 0,25 mm

Tableau 3 : Jeu de montage par dilatation

4.1. Dilatation du diamètre du moyeu: a

$a = j + \Delta_{max} + \text{lissage}$

Il faut définir une perte de serrage (lissage) due à l'écrasement des aspérités de surface. Dans la pratique il convient de majorer les serrages théoriques d'un minimum de 3 x Ra ou (5 µm pour d < 180 ; 10 µm pour d > 180 mm). Ce phénomène est à prendre en compte surtout pour des petits diamètres.

4.2. Élévation de température (Δt) :

$$\Delta t = \frac{a}{\lambda.d}$$

Pour de l'aluminium $\lambda \approx 23.10^{-6}$ mm/mm°C

Acier	Titane	Fonte	Aluminium	Bronze	Laiton	Verre	Plastique
$10,5 \le \lambda \le 12$ (10^{-6} /°C)	$\lambda \approx 9$ (10^{-6} /°C)	$9 \le \lambda \le 11$ (10^{-6} /°C)	$22,5 \le \lambda \le 23,8$ (10^{-6} /°C)	$7 \le \lambda \le 8$ (10^{-6} /°C)	$17 \le \lambda \le 28$ (10^{-6} /°C)	$3,4 \le \lambda \le 5,9$ (10^{-6} /°C)	$65 \le \lambda \le 200$ (10^{-6} /°C)

Tableau 4 : Coefficients de dilatation

Remarque **:** Il faut veiller à ce que la température du moyeu ne dépasse pas, même localement, une valeur qui risque d'affecter les caractéristiques du matériau constitutif.

5. CONDITIONS DU DEMONTAGE

A sec: Effort mini $F_{min} = \pi.l.d.f.p_{min}$
Effort maxi $F_{max} = \pi.l.d.f.p_{max}$

A l'huile: Effort mini $F_{min} = \pi.l.d.f'.p_{min}$
Effort maxi $F_{max} = \pi.l.d.f'.p_{max}$

f' : coefficient de résistance au glissement dans le cas d'un démontage par pression d'huile (f' = 0,02 en pratique).

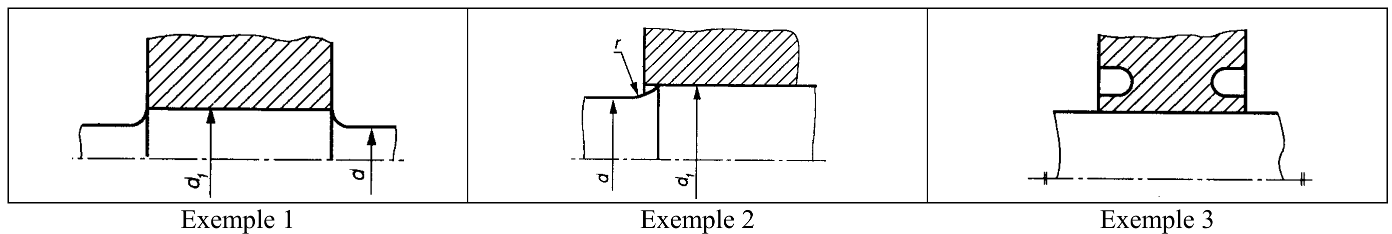
C. CONCEPTION ET RÉALISATION (D'APRES NF E 22-621)

1. MATIERE

La capacité de transmission d'effort d'un assemblage fretté est fonction du coefficient de frottement, du serrage, de la surface de contact et de la géométrie des pièces. Il convient donc de choisir des matériaux offrant une bonne résistance au frottement et aux contraintes pour conserver dans le temps les qualités de l'assemblage. L'attention doit également être portée sur la température nécessaire au montage (voir le paragraphe : conditions de montage).

2. CONCEPTION

L'assemblage doit être étudié pour limiter les concentrations de contraintes (*stress concentration*) et leurs conséquences sur l'arbre, au droit de l'assemblage, ainsi que pour faciliter le montage et, s'il est prévu, le démontage.



Exemple 1 Exemple 2 Exemple 3

Figure 6 : Exemples d'assemblage

Les exemples de la Figure 6 rappellent les dispositions les plus couramment rencontrées dans ce genre d'assemblage. Ces exemples ne sont à considérer que comme un guide, et doivent être adaptées par le concepteur en fonction de son expérience propre et des contraintes dont il doit tenir compte, contraintes mécaniques, économiques, etc.

2.1. Dispositions générales

2.1.1. Augmentation du diamètre de l'arbre

Des études théoriques montrent que l'augmentation de contrainte due à l'effet d'encastrement peut être compensée par une augmentation du diamètre d'environ 10% du droit de l'assemblage (Exemple 1).
Dans la pratique, une telle augmentation est rarement compatible avec la conception générale des assemblages, et on pourra utiliser les valeurs ci-dessous (Exemple 2) :

$d_1 \geq 1{,}01\ d$
$d_{1\ min} = d + 2$
$d_1 - d < r < 2d_1 - d$ (le plus grand possible).

Il est utile de prévoir cette augmentation de diamètre dans tous les cas (assemblage au milieu de l'arbre ou arbre épaulé), afin de faciliter le montage et, éventuellement, le démontage. Mais, l'augmentation de diamètre étant faible, elle n'aura qu'une incidence réduite sur l'effet d'encastrement, et il faudra lui associer l'une des dispositions ci-dessous (gorge de déconcentration de contrainte, évasement de l'entrée du moyeu).

2.1.2. Gorges (*groove*) de déconcentration de contraintes

Ces gorges rendent la pression d'encastrement progressive (Exemple 3). Les valeurs suivantes peuvent être utilisées :

$0{,}01\ d_1 \leq r \leq 0{,}06\ d_1$
$b = 2r$
$c = 1{,}5$ à 2 pour $d_1 \leq 180$
$c = 2$ à 5 pour $d_1 > 180$
$0{,}03\ d_1 \leq e \leq 0{,}05\ d_1$
$r < h < r+c$

2.2. Dispositions particulières pour arbres épaulés (*round shaft with shoulder fillet*)

Les dispositions à adopter sont destinées à éviter le cumul des concentrations de contraintes dues à l'effet d'encastrement (assemblage) et à l'effet d'entaille (épaulement dans une même section de l'arbre. Les cas 4, 5, 6, 7 de la Figure 7 présentent des exemples de mode de réalisation.

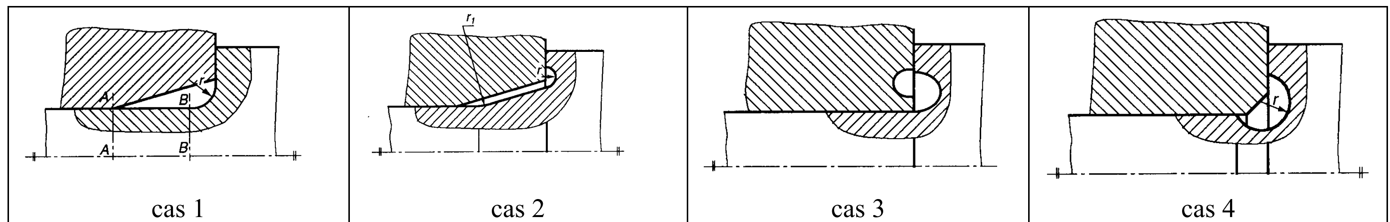


Figure 7 : Exemples de disposition pour arbres épaulés

L'effet d'entaille dû à l'épaulement est diminué par un bon arrondi. Le chanfrein du moyeu sépare la section A-A de l'arbre affaiblie par l'effet d'encastrement, de la section B-B subissant l'effet d'entaille dû à l'épaulement.
Les figures précédentes illustrent d'autres réalisations possibles; ces dispositions ne sont pas limitatives, et le choix entre elles doit être fait par le concepteur en fonction de toutes les caractéristiques de l'assemblage qu'il conçoit (diamètre de l'épaulement, démontage éventuel, coût de réalisation).
Par exemple, le raccordement du diamètre d'assemblage à l'épaulement par deux rayons successifs, permet une grande réduction des pointes de contrainte, mais pour un coût élevé.

- L'épaulement débute par un arrondi à grand rayon et se termine par une rainure de décharge rentrante. Alésage du moyeu avec entrée légèrement conique. La rainure de décharge de l'épaulement n'affaiblit pas l'arbre.
- Une rainure de décharge dans la face frontale du moyeu rend la pression d'encastrement progressive. Base de l'épaulement avec arrondi rentrant. Dans ce cas, le diamètre extérieur de l'épaulement doit être plus grand. La rainure de décharge de l'épaulement n'affaiblit pas l'arbre.
- On obtient un bon arrondi par une rainure de décharge mordant dans l'épaulement. (Moyeu chanfreiné ou non).
- En diminuant le diamètre de l'arbre, on augmente la distance entre les deux sections affaiblies (Figure 8).

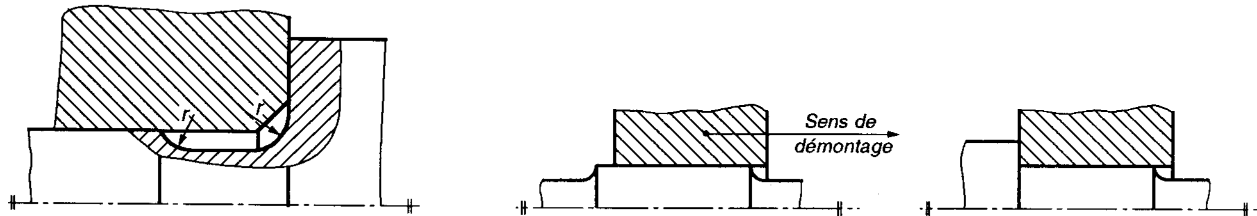


Figure 8 : Exemples de conception pour diminuer les concentrations de contraintes

Remarque importante : Dans tous les cas, l'usinage des raccordements doit être fait avec le plus grand soin, les défauts de surface, mauvais raccordement des rayons, etc., pouvant entraîner des concentrations de contraintes supérieures à celles que l'on cherche à éliminer.

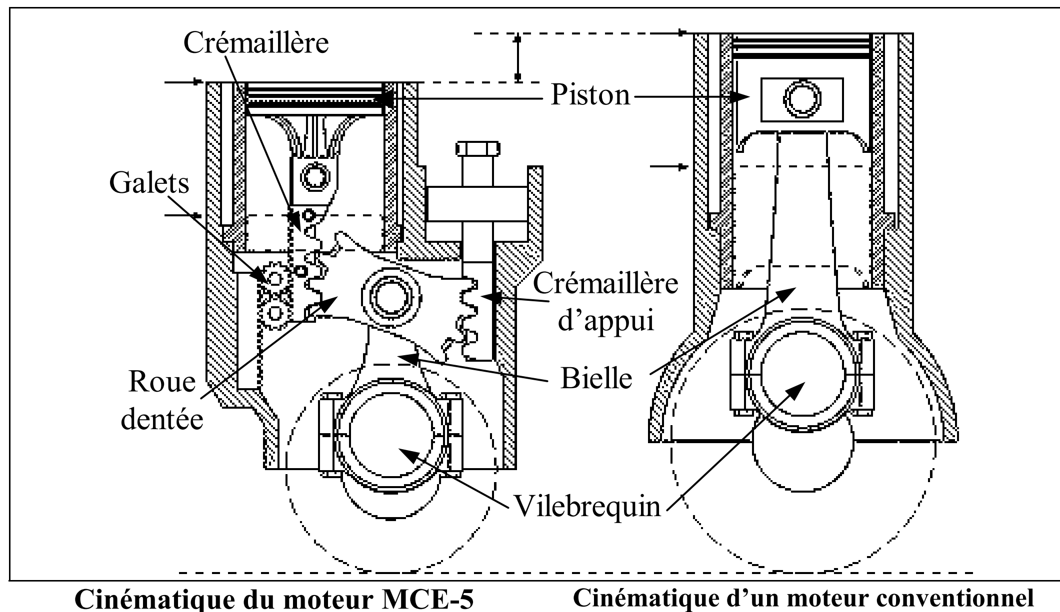
2.3. Position du moyeu pour assemblages démontables

Pour permettre un démontage aisé, le moyeu doit :

- déborder la surface de contact du coté du démontage ;
- être en retrait du côté opposé au démontage.

D. EXERCICE : FRETTAGE DE COUSSINETS D'UN MOTEUR

Dans le cadre d'un développement d'un moteur de nouvelle génération pour le secteur automobile, une société propose une motorisation originale. Le moteur MCE-5 (http://www.mce-5.com), est conçu sur le principe d'un piston désaxé couplé à un système de démultiplicateur par engrenage et crémaillères.



Cinématique du moteur MCE-5 **Cinématique d'un moteur conventionnel**

Le moteur MCE-5 associe plusieurs aspects technologiques :

- variation du taux de compression (action sur la crémaillère d'appui) ;
- pilotage de la levée de la soupape d'admission (réglage de l'avance ou du retard de l'ouverture de la soupape) ;
- ajout d'une suralimentation d'arrivée d'air (turbo-compresseur).

Cette stratégie de combiner ces choix technologiques permet d'améliorer le rendement à toutes les puissances d'utilisation tout en diminuant les émissions de gaz toxique.

L'objectif de cette étude consiste à analyser : le frettage des coussinets de la bielle.

1. 1. EMMANCHEMENT DU COUSSINET DANS LE PIED DE BIELLE (FRETTAGE)

1.1. Hypothèses

- Le coussinet reste dans le domaine élastique au cours de sa déformation ;
- Le coussinet est constitué d'un matériau homogène isotrope ;
- L'épaisseur radiale du coussinet reste constante au cours de l'emmanchement ;
- Le serrage est maximum entre le coussinet et la bielle ;
- La pression de contact est uniforme entre le coussinet et la bielle ;

1.2. Données

- Les géométries du coussinet et de l'alésage de la bielle sont définies ci-dessous.
- Le coefficient de frottement, noté **f**, entre le coussinet et la bielle pendant la phase d'emmanchement vaut 0,1.

$D_b = Ø\,46$ $d = Ø\,28$ $d_{ci} = Ø\,26$
21

Bielle en acier		**Coussinet en bronze**	
E_1 = 206800 MPa ν_1 = 0,29 $R_{p0,2}$ = 1400 MPa		E_2 = 118000 MPa ν_2 = 0,34 $R_{p0,2}$ = 300 MPa	
Qualité et ajustement pour 18 < d ≤ 30			
IT5 = 9		**IT6** = 13	
p^{+}_{+22}	r^{+}_{+28}	s^{+}_{+35}	H^{+}_{0}

Q1. Établir la relation qui lie la pression de contact maximale aux diamètres **d** et $\mathbf{d_{ci}}$ du coussinet, en fonction de la contrainte équivalente de Von Mises : $\mathbf{p_{max}} = f(\sigma_{eq\ VM}, \mathbf{d}, \mathbf{d_{ci}})$. En considérant un coefficient de sécurité minimal de **s** = 1.25, calculer la valeur de $\mathbf{p_{max}}$.

Q2. En se servant de la relation entre $\mathbf{p_{max}}$ et $\mathbf{p_{min}}$, déterminer l'expression de Δ_{max}. En déduire la valeur de Δ_{max}.

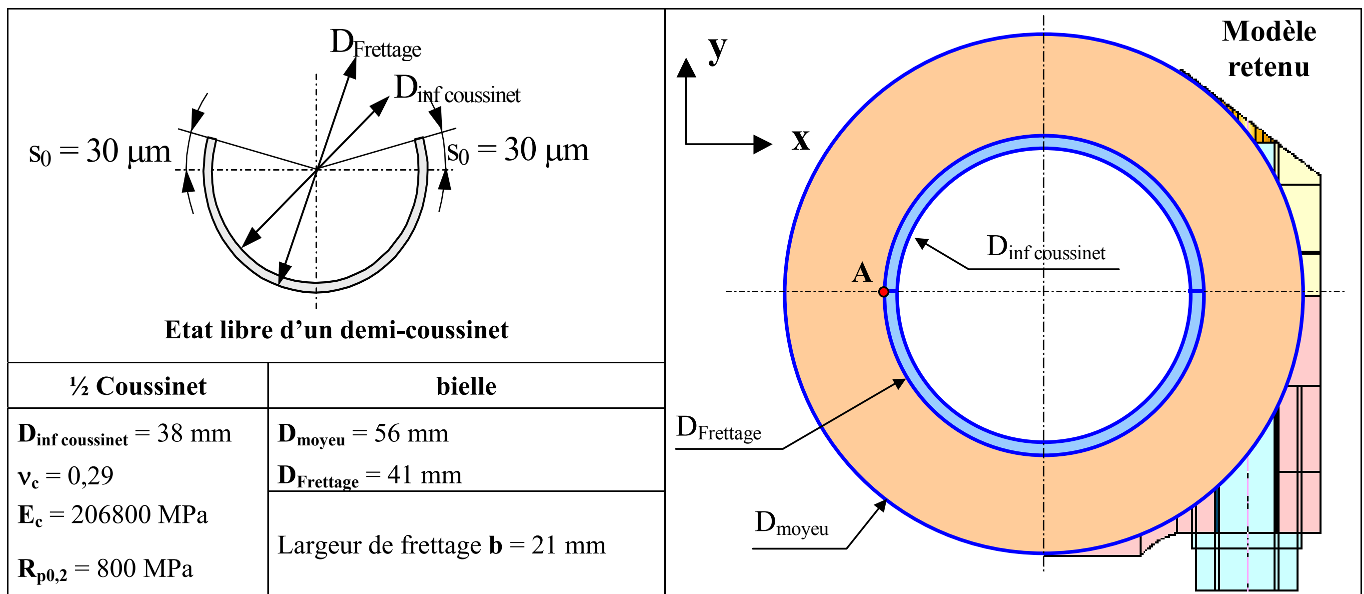
Q3. Pour le couple d'intervalle de tolérance proposé, calculer la valeur de serrage minimale Δ_{min}. Vous préciserez si ce calcul à un intérêt immédiat.

Q4. Rechercher un ajustement qui satisfait au mieux les conditions de sécurité.

Q5. Pour l'ajustement retenu, calculer l'effort maximum ($\mathbf{F_{maxi}}$), à exercer pour emmancher complètement la bague (on prendra k = 1).

2. SERRAGE DES ½ COUSSINETS DANS LA TETE DE BIELLE (FRETTAGE)

Le palier comporte **deux** demi-coussinets lesquels sont montés précontraints lors du serrage de l'assemblage. On considère que la précontrainte des coussinets est réalisée par un déplacement imposé de $2\mathbf{s_0}$ = 60 µm sur chaque coussinet (30 µm de part et d'autre du plan de symétrie [YZ]).



½ Coussinet	bielle
$\mathbf{D_{inf\ coussinet}}$ = 38 mm ν_c = 0,29 $\mathbf{E_c}$ = 206800 MPa $\mathbf{R_{p0,2}}$ = 800 MPa	$\mathbf{D_{moyeu}}$ = 56 mm $\mathbf{D_{Frettage}}$ = 41 mm Largeur de frettage **b** = 21 mm

Q6. En précisant les hypothèses de travail et en tenant compte des conditions de serrage imposées, calculer la longueur de la circonférence $\mathbf{l_0}$, à l'état libre, d'un demi-coussinet.

Q7. Pour le modèle retenu, déterminer la déformation dans la direction circonférentielle (ε_θ). En déduire, le déplacement radial du coussinet $\mathbf{u_{r(c)}}$ associé à ε_θ.

Q8. Donner l'expression de la pression **p** en **A** en fonction de $\mathbf{u_{r(c)}}$. Calculer cette pression. Les caractéristiques mécaniques de la bielle sont celles déjà établies dans l'étude du frettage du pied de bielle.

Q9. Déterminer le déplacement radial du logement de la bielle $\mathbf{u_{r(b)}}$.

Q10. Calculer le serrage minimal (Δ) associé aux conditions précédentes.

TABLEAUX SUR LES TOLERANCES ET LES AJUSTEMENTS

Tolérances fondamentales IT (en micromètres)				Ø	Ajustements (en micromètres)								
						e_{inf}	e_{sup}		e_{inf}	e_{sup}		e_{inf}	e_{sup}
5	**6**	**7**	**8**		H6	0	+ IT	H7	0	+IT	H8	0	+IT
4	6	10	14	**1 < d ≤ 3**	r5	+ 10	+ 14	s6	+ 14	+ 20	u7	+ 18	+ 28
5	8	12	18	**3 < d ≤ 6**		+ 15	+ 20	r6	+ 15	+ 23	s7	+ 19	+ 31
6	9	15	22	**6 < d ≤ 10**	n5	+ 10	+ 16		+ 19	+ 28		+ 23	+ 38
8	11	18	27	**10 < d ≤ 18**		+ 12	+ 20		+ 23	+ 34		+ 28	+ 46
9	13	21	33	**18 < d ≤ 30**		+ 15	+ 24	p6	+ 22	+ 35		+ 22	+ 43
11	16	25	39	**30 < d ≤ 50**		+ 17	+ 28		+ 26	+ 42		+ 26	+ 51
13	19	30	46	**50 < d ≤ 65**		+ 20	+ 33		+ 32	+ 51		+ 32	+ 62
				65 < d ≤ 80		+ 20	+ 33		+ 32	+ 51		+ 32	+ 62
15	22	35	54	**80 < d ≤ 100**		+ 23	+ 38		+ 37	+ 59		+ 37	+ 72
				100 < d ≤ 120		+ 23	+ 38		+ 37	+ 59		+ 37	+ 72
18	25	40	63	**120 < d ≤ 140**		+ 27	+ 45		+ 43	+ 68		+ 43	+ 83
				140 < d ≤ 160		+ 27	+ 45		+ 43	+ 68	r7	+ 65	+ 105
				160 < d ≤ 180		+ 27	+ 45		+ 43	+ 68		+ 68	+ 108
20	29	46	72	**180 < d ≤ 200**		+ 31	+ 51		+ 50	+ 79		+ 77	+ 123
				200 < d ≤ 225		+ 31	+ 51		+ 50	+ 79		+ 80	+ 126
				225 < d ≤ 250		+ 31	+ 51		+ 50	+ 79		+ 84	+ 130
23	32	52	81	**250 < d ≤ 280**		+ 34	+ 54		+ 56	+ 88		+ 94	+ 146
				280 < d ≤ 315		+ 34	+ 54		+ 56	+ 88		+ 98	+ 150
25	36	57	89	**315 < d ≤ 355**		+ 37	+ 62		+ 62	+ 98		+ 108	+ 165
				355 < d ≤ 400		+ 37	+ 62		+ 62	+ 98		+ 114	+ 171
27	40	63	97	**400 < d ≤ 450**		+ 40	+ 67		+ 68	+ 108		+ 126	+ 189
				450 < d ≤ 500	p5	+ 40	+ 67		+ 68	+ 108		+ 132	+ 195

Exemples: Pour Ø 20 H6, le plus petit arbre assurant un serrage est Ø 20 n5.

Pour Ø 150 H8, c'est l'arbre de Ø 150 r7.

Ø 20 H6 — **Ø 20 n5** — **serrage**

+13 — +24 ⇨ Maxi = - 24 µm

0 — +15 ⇨ Mini = - 2 µm

Ecart fondamental selon ISO pour côtes mâles (arbre)

Tolérance	Qualité	signe[2]	Cote nominale en mm sup. 1 incl. 3	3 6	6 10	10 14	14 18	18 24	24 30	30 40	40 50	50 65	65 80	80 100	100 120	120 140	140 160	160 180	180 200	200 225	225 250	250 280	280 315	315 355	355 400	400 450	450 500
			Ecart fondamental en µm (DIN ISO 286-1)																								
a		-	270	270	280	290	290	300	300	310	320	340	360	380	410	460	520	580	660	740	820	9 920	1 050	1 200	1 350	1 500	1 650
b		-	140	140	150	150	150	160	160	170	180	190	200	220	240	260	280	310	340	380	420	480	540	600	680	760	840
c		-	60	70	80	95	95	110	110	120	130	140	150	170	180	200	210	230	240	260	280	300	330	360	400	440	480
d	Toutes	-	20	30	40	50	50	65	65	80	80	100	100	120	120	145	145	145	170	170	170	190	190	210	210	230	230
e	qualités	-	14	20	25	32	32	40	40	50	50	60	60	72	72	85	85	85	100	100	100	110	110	125	125	135	135
f		-	6	10	13	16	16	20	20	25	25	30	30	36	36	43	43	43	50	50	50	56	56	62	62	68	68
g		-	2	4	5	6	6	7	7	9	9	10	10	12	12	14	14	14	15	15	15	17	17	18	18	20	20
h			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
j[1]	5 et 6	-	2	2	2	3	3	4	4	5	5	7	7	9	9	11	11	11	13	13	13	16	16	18	18	20	20
j[1]	7	-	4	4	5	6	6	8	8	10	10	12	12	15	15	18	18	18	21	21	21	26	26	28	28	32	32
js	Ttes qual.		Ecarts limites ±1/2 IT (pour chaque qualité)																								
k	4 à 7	+	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5
k	de 8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m		+	2	4	6	7	7	8	8	9	9	11	11	13	13	15	15	15	17	17	17	20	20	21	21	23	23
n		+	4	8	10	12	12	15	15	17	17	20	20	23	23	27	27	27	31	31	31	34	34	37	37	40	40
p		+	6	12	15	18	18	22	22	26	26	32	32	37	37	43	43	43	50	50	50	56	56	62	62	68	68
r		+	10	15	19	23	23	28	28	34	34	41	43	51	54	63	65	68	77	80	84	94	98	108	114	126	132
s		+	14	19	23	28	28	35	35	43	43	53	59	71	79	92	100	108	122	130	140	158	170	190	208	232	252
t		+	-	-	-	-	-	-	41	48	54	66	75	91	104	122	134	146	166	180	196	218	240	268	294	330	360
u	Toutes	+	18	23	28	33	33	41	48	60	70	87	102	124	144	170	190	210	236	258	284	315	350	390	435	490	540
v	qualités	+	-	-	-	-	39	47	55	68	81	102	120	146	172	202	228	252	284	310	340	385	425	475	530	595	660
x		+	20	28	34	40	45	54	64	80	97	122	146	178	210	248	280	310	350	385	425	475	525	590	660	740	820
y		+	-	-	-	-	-	63	75	94	114	144	174	214	254	300	340	380	425	470	520	580	650	730	820	920	1000
z		+	26	35	42	50	60	73	88	112	136	172	210	258	310	365	415	465	520	575	640	710	790	900	1000	1100	1250
za		+	32	42	52	64	77	98	118	148	180	226	274	335	400	470	535	600	670	740	820	920	1 000	1150	1300	1450	1600
zb		+	40	50	67	90	108	136	160	200	242	300	360	445	525	620	700	780	880	960	1 050	1 200	1 300	1500	1650	1850	2100
zc		+	60	80	97	130	150	188	218	274	325	405	480	585	690	800	900	1 000	1 150	1 250	1 350	1 550	1 700	1900	2100	2400	2600

[1] Pour la tolérance j, l'écart fondamental donné correspond généralement à l'écart inférieur.

[2] signe + : valeur de l'écart inférieur (ei) et signe - : valeur de l'écart supérieur (es)

Ecart fondamental selon ISO pour côtes femelles (alésage)

Tolérance	Qualité	signe[2]	Cote nominale en mm																								
			sup. 1	3	6	10	14	18	24	30	40	50	65	80	100	120	140	160	180	200	225	250	280	315	355	400	450
			incl. 3	6	10	14	18	24	30	40	50	65	80	100	120	140	160	180	200	225	250	280	315	355	400	450	500
			Ecart fondamental en mm (DIN ISO 286-1)																								
A	Toutes qualités	+	270	270	280	290	290	300	300	310	320	340	360	380	410	460	520	580	660	740	820	920	1 050	1 200	1 350	1 500	1 650
B		+	140	140	150	150	150	160	160	170	180	190	200	220	240	260	280	310	340	380	420	480	540	600	680	760	840
C		+	60	70	80	95	95	110	110	120	130	140	150	170	180	200	210	230	240	260	280	300	330	360	400	440	480
D		+	20	30	40	50	50	65	65	80	80	100	100	120	120	145	145	145	170	170	170	190	190	210	210	230	230
E		+	14	20	25	32	32	40	40	50	50	60	60	72	72	85	85	85	100	100	100	110	110	125	125	135	135
F		+	6	10	13	16	16	20	20	25	25	30	30	36	36	43	43	43	50	50	50	56	56	62	62	68	68
G		+	2	4	5	6	6	7	7	9	9	10	10	12	12	14	14	14	15	15	15	17	17	18	18	20	20
H			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J[1]	6	+	2	5	5	6	6	8	8	10	10	13	13	16	16	18	18	18	22	22	22	25	25	29	29	33	33
J[1]	7	+	4	6	8	10	10	12	12	14	14	18	18	22	22	26	26	26	30	30	30	36	36	39	39	43	43
J[1]	8	+	6	10	12	15	15	20	20	24	24	28	28	34	34	41	41	41	47	47	47	55	55	60	60	66	66
JS	Ttes qual.		Ecarts limites ±1/2 IT (pour chaque qualité)																								
K	5	+	0	0	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	3	2	2	2	3	3	3	3	2	2
K	6	+	0	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	7	7	8	8
K	7	+	0	3	5	6	6	6	6	7	7	9	9	10	10	12	12	12	13	13	13	16	16	17	17	18	18
K	8	+	0	5	6	8	8	10	10	12	12	14	14	16	16	20	20	20	22	22	22	25	25	28	28	29	29
M	6	-	2	1	3	4	4	4	4	4	4	5	5	6	6	8	8	8	8	8	8	9	9	10	10	10	10
M	7	-	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	8		-2	+2	+1	+2	+2	+4	+4	+5	+5	+5	+5	+6	+6	+8	+8	+8	+9	+9	+9	+9	+9	+11	+11	+11	+11
M	de 9	-	2	4	6	7	7	8	8	9	9	11	11	13	13	15	15	15	17	17	17	20	20	21	21	23	23
N	6	-	4	5	7	9	9	11	11	12	12	14	14	16	16	20	20	20	22	22	22	25	25	26	26	27	27
N	7	-	4	4	4	5	5	7	7	8	8	9	9	10	10	12	12	12	14	14	14	14	14	16	16	17	17
N	8	-	4	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6
N	de 9	-	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P	6	-	6	9	12	15	15	18	18	21	21	26	26	30	30	36	36	36	41	41	41	47	47	51	51	55	55
R		-	10	12	16	20	20	24	24	29	29	35	37	44	47	56	58	61	68	71	75	85	89	97	103	113	119
S		-	14	16	20	25	25	31	31	38	38	47	53	64	72	85	93	101	113	121	131	149	161	179	197	219	239
T		-	-	-	-	-	-	-	37	43	49	60	69	84	97	115	127	139	157	171	187	209	231	257	283	317	347
U		-	18	20	25	30	30	37	44	55	65	81	96	117	137	163	183	203	227	249	275	306	341	379	424	477	527
V		-	-	-	-	-	36	43	51	63	76	96	114	139	165	195	221	245	275	301	331	376	416	464	519	582	647
X		-	20	25	31	37	42	50	60	75	92	116	140	171	203	241	273	303	341	376	416	466	516	579	649	727	807
Y		-	-	-	-	-	-	59	71	89	109	138	168	207	247	293	333	373	416	461	511	571	641	719	809	907	987
Z		-	26	32	39	47	57	69	84	107	131	166	204	251	303	358	408	458	511	566	631	701	781	889	989	1 087	1 237
ZA		-	32	39	49	61	74	94	114	143	175	220	268	328	393	463	528	593	661	731	811	911	991	1 139	1 289	1 437	1 587
ZB		-	40	47	64	87	105	132	156	195	237	294	354	438	518	613	693	773	871	951	1 041	1 191	1 291	1 489	1 639	1 837	2 087
ZC	6	-	60	77	94	127	147	184	214	269	320	399	474	578	683	793	893	993	1 141	1 241	1 341	1 541	1 691	1 889	2 089	2 387	2 587
P	7	-	6	8	9	11	11	14	4	17	17	21	21	24	24	28	28	28	33	33	33	36	36	41	41	45	45
R		-	10	11	13	16	16	20	20	25	25	30	32	38	41	48	50	53	60	63	67	74	78	87	93	103	109
S		-	14	15	17	21	21	27	27	34	34	42	48	58	66	77	85	93	105	113	123	138	150	169	187	209	229
T		-	-	-	-	-	-	-	33	39	45	55	64	78	91	107	119	131	149	163	179	198	220	247	273	307	337
U		-	18	19	22	26	26	33	40	51	61	76	91	111	131	155	175	195	219	241	267	295	330	369	414	467	517
V		-	-	-	-	-	32	39	47	59	72	91	109	133	159	187	213	237	267	293	323	365	405	454	509	572	637
X		-	20	24	28	33	38	46	56	71	88	111	135	165	197	233	265	295	333	368	408	455	505	569	639	717	797
Y		-	-	-	-	-	-	55	67	85	105	133	163	201	241	285	325	365	408	453	503	560	630	709	799	897	977
Z		-	26	31	36	43	53	65	80	103	127	161	199	245	297	350	400	450	503	558	623	690	770	879	979	1 077	1 227
ZA		-	32	38	46	57	70	90	110	139	171	215	263	322	387	455	520	585	653	723	803	900	980	1 129	1 279	1 427	1 577
ZB		-	40	46	61	83	101	128	152	191	233	289	349	432	512	605	685	765	863	943	1 033	1 180	1 280	1 479	1 629	1 827	2 077
ZC	7	-	60	76	91	123	143	180	210	265	316	394	469	572	677	785	885	985	1 133	1 233	1 333	1 530	1 680	1 879	2 079	2 377	2 577
P	de 8	-	6	12	15	18	18	22	22	26	26	32	32	37	37	43	43	43	50	50	50	56	56	62	62	68	68
R		-	10	15	19	23	23	28	28	34	34	41	43	51	54	63	65	68	77	80	84	94	98	108	114	126	132
S		-	14	19	23	28	28	35	35	43	43	53	59	71	79	92	100	108	122	130	140	158	170	190	208	232	252
T		-	-	-	-	-	-	-	41	48	54	66	75	91	104	122	134	146	166	180	196	218	240	268	294	330	360
U		-	18	23	28	33	33	41	48	60	70	87	102	124	144	170	190	210	236	258	284	315	350	390	435	490	540
V		-	-	-	-	-	39	47	55	68	81	102	120	146	172	202	228	252	284	310	340	385	425	475	530	595	660
X		-	20	28	34	40	45	54	64	80	97	122	146	178	210	248	280	310	350	385	425	475	525	590	660	740	820
Y		-	-	-	-	-	-	63	75	94	114	144	174	214	254	300	340	380	425	470	520	580	650	730	820	920	1 000
Z		-	26	35	42	50	60	73	88	112	136	172	210	258	310	365	415	465	520	575	640	710	790	900	1 000	1 100	1 250
ZA		-	32	42	52	64	77	98	118	148	180	226	274	335	400	470	535	600	670	740	820	920	1 000	1 150	1 300	1 450	1 600
ZB		-	40	50	67	90	108	136	160	200	242	300	360	445	525	620	700	780	880	960	1 050	1 200	1 300	1 500	1 650	1 850	2 100
ZC	de 8	-	60	80	97	130	150	188	218	274	325	405	480	585	690	800	900	1 000	1 150	1 250	1 350	1 550	1 700	1 900	2 100	2 400	2 600

[1] Pour la tolérance J, l'écart fondamental donné correspond généralement à l'écart supérieur.

[2] signe + : valeur de l'écart inférieur (EI) et signe - : valeur de l'écart supérieur (ES)

LE FLAMBEMENT (*BUCKLING*)

A. THÉORIE D'EULER. CHARGE CRITIQUE (*critical load*)

1. DEFINITION

On dit qu'il y a flambement quand, sous l'action d'un effort axial important une poutre rectiligne de grande longueur fléchit.
On constate en effet que si on charge axialement un poteau de grande longueur, celui-ci reste d'abord rectiligne et se comporte comme en compression ; puis pour une certaine valeur de la charge, très brutalement, le poteau se plie et peut même se rompre (*damage*) aussitôt.
Les grandes déformations affectent les zones comprimées des pièces, qui présentent dès lors trois types de comportement caractéristiques :

- ***Le déversement***, qui affecte les semelles comprimées des pièces fléchies et qui est moins dangereux que le flambement.
- ***Le voilement***, qui affecte les âmes des pièces, qui reste secondaire.
- ***Le flambement***, qui affecte les pièces simplement comprimées (flambement simple) ou comprimées et fléchies (flambement flexion) qui est un phénomène particulièrement dangereux.

La déformation qui apparaît ainsi est une flexion. Elle correspond à un état instable. Pour une très faible augmentation de la charge se produisent la flexion et la rupture. La charge correspondante est appelée ***charge critique***.
La flexion se produit dans le plan qui correspond à la résistance minimale en flexion, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à l'axe par rapport auquel le moment d'inertie d'une section est minimal (axe zz' pour les poutres suivantes qui se déforment dans le plan yy').

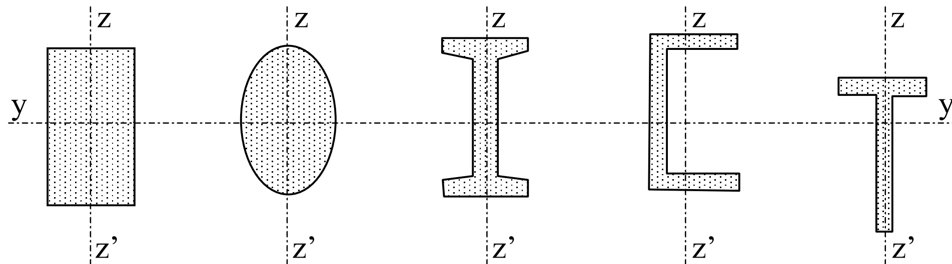


Figure 1 : Exemples de section

2. THEORIE D'EULER

Soit une poutre parfaitement rectiligne dans l'axe de laquelle sont exactement appliquées en ses extrémités A et B deux forces opposées (dirigées chacune vers le point d'application de l'autre).

On suppose de plus qu'aux extrémités, qui sont fixes, la poutre peut se déformer librement, c'est-à-dire qu'on assimile les liaisons aux extrémités à des articulations parfaites.
Considérons cette poutre dans son état déformé en flexion simple due à P et -P.
Soient dans le plan de déformation de la poutre les axes Ax dirigés suivant la ligne neutre initiale et Ay directement perpendiculaire.
Au point M d'abscisse x et de déformation y, le moment de flexion est le moment de P, soit :

$$M_f = Py$$

L'équation différentielle de la déformée est ainsi :

$$EIy'' = Py$$

équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients y constants, sans second membre, dont la solution générale est :

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x \quad \text{si on pose} \quad \omega^2 = P/EI.$$

On peut essayer de déterminer les constantes d'intégration A et B par les conditions aux limites soit :

- pour x = 0, y = 0, d'où $A = 0$;
- pour x = l, y = 0, d'où $B\sin\omega l = 0$.

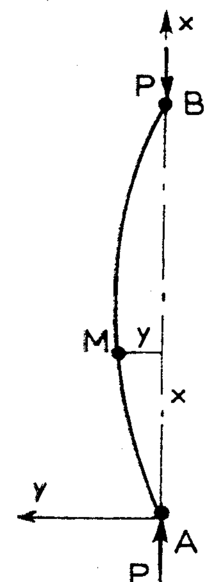


Figure 2 : Modèle

Cette dernière relation est vérifiée pour $B = 0$, mais alors il n'y a pas de déformation, ou pour

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\, l = k\pi$$

expression qui ne définit pas la constante *B,* mais qui impose une condition pour P.
Pratiquement d'ailleurs, k ne peut être égal qu'à 1.

La charge ainsi définie, pour laquelle la déformation envisagée est possible est appelée ***charge critique d'Euler,*** que l'on notera F_k.

$$F_k = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

Ainsi, pour une poutre rigoureusement rectiligne, liée par des articulations parfaites et chargée rigoureusement suivant son axe :

- si la charge est inférieure à la charge critique d'Euler, la poutre reste rectiligne,
- si la charge atteint la valeur critique d'Euler, la déformation est indéfinie (B indéterminé), c'est-à-dire que l'équilibre est indifférent et dangereux, la rupture se produisant aussitôt.

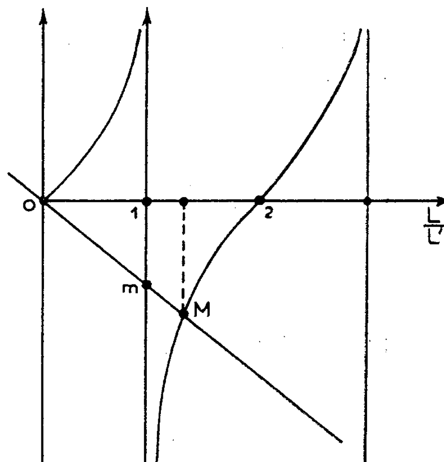
3. LONGUEUR LIBRE DE VOILEMENT L_K

On écrit quelquefois la charge critique sous la même forme que dans le cas des liaisons par articulation :

$$F_k = \pi^2 \frac{EI}{L_k^{\ 2}}$$

Mais dans cette expression, L_k n'est plus la longueur de la poutre. C'est la longueur du demi-pas de la sinusoïde dont 1a déformée est un morceau. On la nomme *longueur libre de voilement.*
Au lieu de définir la charge critique F_k, on peut définir la longueur libre de voilement L_k qui lui est liée, en fonction de la rigidité k de l'encastrement imparfait des extrémités.
De $F_k = \pi^2 EI/L_k^2$ et $\omega^2 = P/EI$ on tire

$$\omega = \frac{\pi}{L'} \quad \text{et} \quad \text{tg}\, \frac{\pi}{2}\frac{L}{L'} = -\frac{\pi EI}{Lk}\frac{L}{L'}$$



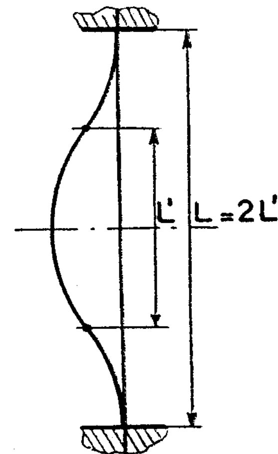


Figure 3 : Longueur libre

On peut aisément déterminer graphiquement *L'*, ou le rapport *L/L'* en traçant d'une part la courbe

$$\text{tg}\, \frac{\pi}{2}\frac{L}{L'}$$

et d'autre part la courbe

$$-\frac{\pi EI}{Lk}\frac{L}{L'}$$

laquelle est une droite de coefficient angulaire - $\pi EI/Lk$, quantités que l'on peut directement porter sur l'asymptote de la courbe *tangente.*
Ainsi, pour une poutre donnée, à chaque valeur de la rigidité d'encastrement k correspond une droite, donc un point d'intersection, donc une valeur de *L/L',* donc une charge critique.
Remarquons que pour k = 0 (cas de l'articulation parfaite déjà étudié), la droite est verticale (parallèle à l'asymptote de la courbe *tangente,* (c'est-à-dire que l'on retrouve *L=L'.*

Pour k infini, c'est-à-dire pour un encastrement parfait qui empêcherait toute rotation des extrémités, la droite serait horizontale et couperait la courbe au point *L/L' = 2 : la* longueur libre de voilement est la moitié de la longueur de la poutre, ce qu'on peut d'ailleurs vérifier directement : pour la poutre liée par des articulations parfaites le moment de flexion est nul aux extrémités, lesquelles correspondent aux points d'inflexion de l'arc de sinusoïde.

B. CONDITIONS RÉELLES

1. PRISE EN COMPTE DES DEFAUTS

Si expérimentalement on constate que le phénomène de flambement est effectivement brutal, on ne passe tout de même pas, en général, d'une façon discontinue de la rectitude à la rupture. Les raisons de cette différence avec la théorie d'Euler sont la non-rectitude rigoureuse des poutres, et le fait que les efforts supportés ne sont pas rigoureusement deux forces axiales.
Supposons donc que la poutre initiale ne soit pas parfaitement rectiligne et qu'elle présente par rapport à l'axe théorique Ax une flèche, très petite, *a*.
Admettons, bien que la forme exacte n'intervienne pas, que la déformée initiale soit un arc de sinusoïde :

$$y_0 = a \sin \pi \frac{x}{L}$$

(nous choisissons cette forme simple parce que les courbes trouvées sont des sinusoïdes et nous prévoyons des simplifications de calcul) ; une telle forme permettra toujours d'approcher la réalité.
Soit y la déformation élastique de flexion due à l'application de P, c'est-à-dire qu'à partir de l'axe théorique Ax, la déformation totale est :

$$Y = y + a \sin \pi \frac{x}{L}$$

D'où le moment de flexion :

$$M_f = Py + Pa \sin \pi \frac{x}{L}$$

et l'équation différentielle de la déformée :

$$y'' + \frac{P}{EI} y = -\frac{Pa}{EI} \sin \pi \frac{x}{L}$$

C'est encore une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre, dont la solution générale est, en posant toujours $\omega^2 = P/EI$:

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x + \lambda \sin \pi \frac{x}{L}$$

avec :

$$\lambda = \frac{\dfrac{-Pa}{EI}}{\dfrac{P}{EI} - \dfrac{\pi^2}{L^2}} = -\frac{a}{1 - \dfrac{\pi^2}{L^2}\dfrac{EI}{P}} = -\frac{a}{1 - \dfrac{P_c}{P}}$$

en appelant P_c la charge critique d'Euler :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration A et B utilisons toujours les conditions aux limites :
-en A : $x = 0$ et $y = 0$, d'où $A = 0$;
- en B : $x = L$ et $y = 0$, soit $B \sin \omega L = 0$.

Mais cette fois-ci, contrairement aux cas précédents, on peut en tirer B = 0 car le système a tout de même une déformation: celle correspondant à la solution particulière de l'équation avec second membre.
Ainsi, s'il y a une déformation initiale, cette déformation augmente quelle que soit la charge P appliquée.
L'équation de la déformée est finalement (déformation élastique plus déformation initiale) :

$$Y = y + y_0 = \left[1 - \frac{1}{1 - \dfrac{P_c}{P}}\right] a \sin \pi \frac{x}{L} = \frac{a}{1 - \dfrac{P}{P_c}} \sin \pi \frac{x}{L}$$

En particulier, la *flèche totale* est :

$$\boxed{f = \frac{a}{1 - \dfrac{P}{P_c}}}$$

2. VARIATIONS DE LA FLECHE EN FONCTION DE LA CHARGE

L'expression ci-dessus de la flèche en fonction de P/Pc est représentée par un arc d'hyperbole équilatère d'asymptote verticale P/Pc = 1.
P/Pc varie entre 0 et 1, et la flèche croît de la valeur initiale a à l'infini, c'est-à-dire à la rupture quand la charge P atteint la valeur critique d'Euler.

Notons qu'à l'origine la tangente à cette courbe a pour pente a, et qu'ainsi, pour des valeurs de a plus faibles, on aurait des arcs d'hyperbole ayant la même asymptote et situés au-dessous de l'hyperbole tracée.

A la limite, quand *a* tend vers zéro, on tend vers la portion (0,1) de l'axe des abscisses et l'asymptote : on retrouve comme cas particulier limite pour une déformation initiale nulle 1a rectitude et la rupture brutale.

D'une manière générale, la déformation est d'autant plus brutale que la flèche initiale est plus petite.

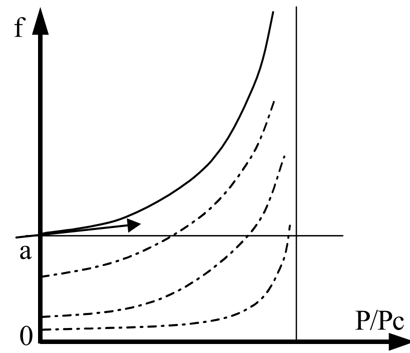


Figure 4 : Evolution de la flèche

Nous admettrons que ces résultats sont généraux, c'est-à-dire qu'intervient seulement la flèche initiale et non la forme de la déformée, et qu'il en est de même pour les autres modes de liaison aux extrémités.

C. CALCUL D'UN POTEAU AU FLAMBEMENT

1. CHARGE DE SECURITE

Quand il y a risque de flambement pour une pièce longue (tel un poteau), on doit s'assurer que la charge supportée est inférieure à la charge critique :

$$P < P_c = \frac{\pi^2 EI}{L'^2}$$

On se fixe donc une charge limite, la charge de sécurité que l'on définit à partir de la charge critique avec un coefficient de sécurité approprié :

$$P = \frac{P_c}{k}$$

Étant données la brutalité et l'incertitude du phénomène, on prend généralement un coefficient de sécurité assez élevé. On fixe, par exemple entre P_c et P un rapport double de celui admis en compression simple entre *Re* et *Rp* :

$$k = \frac{P_c}{P} = \frac{2\,R_e}{R_p}$$

on aura ainsi, par exemple, pour l'acier doux
Re = 250 MPa et Rp = 100 MPa, k = 5 ;

ou pour la fonte
Re= 80 MPa et Rp= 20 MPa, k = 8.

2. LIMITES D'UTILISATION

Pour les extrémités dans le cas d'articulations parfaites, ou d'une manière générale pour les points d'inflexion de la ligne neutre où le moment de flexion est nul, la contrainte normale dans une section droite se réduit à la contrainte de compression simple, soit, avec la charge de sécurité précédente :

$$n = \frac{P}{S} = \frac{R_p}{2\,R_e}\,\frac{\pi^2 EI}{L'^2 S} = \frac{\pi^2 ER_p}{2\,R_e}\left(\frac{r}{L'}\right)^2$$

On admet généralement, forfaitairement, que la contrainte normale maximale totale (due à la compression d'une part et à la flexion d'autre part) peut atteindre le double de la valeur précédente. C'est cette contrainte normale maximale qui doit rester inférieure à la résistance pratique de traction, soit :

$$n_{\max} = \frac{\pi^2 ER_p}{R_e}\left(\frac{r}{L'}\right)^2 \leqslant R_p$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{L'}{r}\right)^2 \geqslant \frac{\pi^2 E}{R_e}$$

Ainsi, les formules d'Euler conviennent quand l'élancement de la poutre (que l'on caractérise par le rapport *L'/r)* est suffisamment grand :

$$\frac{L'}{r} \geqslant \frac{1}{\beta} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{\beta^2} = \frac{\pi^2 E}{R_e}$$

Ordre de grandeur

- acier	E = 210000 MPa	Re = 210 MPa	$\frac{1}{\beta} \approx 100$
- fonte	E = 80000 MPa	Re = 150 MPa	$\frac{1}{\beta} \approx 72$
- bois	E = 10000 MPa	Re = 25 MPa	$\frac{1}{\beta} \approx 60$

Remarquons qu'à l'aide du coefficient sans dimension f3 la formule d'Eider peut encore s'écrire pour la charge de sécurité :

$$P = \frac{R_p}{2\,R_e}\,\pi^2\,E\left(\frac{r}{L'}\right)^2\,S = \frac{R_p\,S}{2\,\beta^2(L'|r)^2}$$

formule qui fait apparaître au numérateur la charge de compression simple R_p S, et dont le dénominateur est un coefficient correctif sans dimension fonction de l'élancement de la poutre.

Pour une poutre très courte, ou seule est à considérer la compression simple, la charge admissible est :

$P = R_P\,S$

Dans les cas intermédiaires, Rankine propose d'utiliser une formule empirique qui se raccorde aux deux expressions précédentes :

$$P = \frac{R_p S}{1+\beta^2\left(L'/r\right)^2}$$

Le terme correctif du dénominateur devient négligeable pour des élancements inférieurs à 20, et on retombe sur la formule de compression simple.
Elle donne la même valeur *(R_p S/2)* que la formule d'Euler pour l'élancement critique 1/β. On a donc, en résumé, suivant l'élancement, pour l'acier par exemple :

$L'/r \le 20$	$20 \le L'/r < 100$	$L'/r > 100$
Compression simple	Rankine	Euler
$P = R_p S$	$P = \frac{R_p S}{1+\beta^2\left(L'/r\right)^2}$	$P = \frac{R_p S}{2\beta^2\left(L'/r\right)^2}$

D. MÉTHODE DE DUTHEIL

La méthode de Dutheil est une méthode générale applicable quel que soit l'élancement de la pièce.
De plus elle ne pose pas à priori que la contrainte maximale peut être évaluée forfaitairement au double de la contrainte de compression simple.
Mais par contre, elle admet la constance d'un certain coefficient n_0 homogène à une contrainte (ce que vérifie sensiblement l'expérience).

Sous l'action d'une charge P, les contraintes normales dans une section droite sont dues à la -superposition d'une flexion simple et d'une compression simple, soit :

$$n = \frac{P}{S} + \frac{M_f}{I/v}$$

La contrainte maximale est obtenue au point de déformation maximale (flèche) et on a vu que pour une flèche initiale *a,* la flèche était :

$$f = \frac{a}{1 - P/P_c}$$

d'où, la contrainte maximale due à la flexion :

$$\frac{M_f}{I/v} = \frac{Pav}{(1 - P/P_c)\,I} = \frac{Pav\pi^2\,EI}{(P_c - P)\,IL^2} = \frac{\pi^2\,Eva}{L^2}\;\frac{P}{P_c - P}$$

C'est l'expression $\pi^2\ Eva/L^2$ homogène à une contrainte et que l'on notera n_0 et que Dutheil suppose constante. L'expérience indique qu'elle est de l'ordre de 100 MPa. Si on admettait que la contrainte totale maximale puisse atteindre la limite élastique, on aurait une charge P_e telle que :

$$R_e = \frac{P_e}{S} + n_0 \frac{P_e}{P_c - P_e}$$

qu'on peut encore écrire :
$P_e^2 - (P_c + R_eS + n_0S)P_e - R_eSP_c = 0.$

Posons encore :

$$2\,n_1 = n_0 + R_e + \frac{P_c}{S}$$

il vient finalement pour la charge faisant atteindre la limite élastique :

$$P_e = S\left[n_1 - \sqrt{n_1^2 + R_e\frac{P_c}{S}}\right]$$

Dès lors, si on se fige un coefficient de sécurité k la charge de sécurité à admettre sera :

$$P = \frac{S}{k}\left[n_1 - \sqrt{n_1^2 + R_e\frac{P_c}{S}}\right]$$

E. EXERCICE : VERIFICATION DE LA TENUE DES PYLONES D'UN TELESIEGE

On se propose d'étudier l'implantation d'un pylône de télécabine. Le pylône est fixé en partie basse sur un massif en béton qui assure la liaison au sol assimilable à un encastrement. Le dimensionnement des pylônes doit prendre en compte les charges climatiques (vents …) et les charges d'exploitation.

1. DONNEES TECHNIQUES

Une étude préliminaire a permis d'évaluer ces différentes charges, lesquelles, ont été ramenées au point A du fût du pylône (Figure 5) et vaut :

$$\{\tau_{ActionsExt/Fût}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & -51268 \text{ N.m} \\ 8545\text{N} & 107294 \text{ N.m} \\ -84569\text{N} & 7279 \text{ N.m} \end{Bmatrix}_{(A,R_1)}$$

Le fût est tubulaire de section constante dont les dimensions sont :

- hauteur, **h** = 6 m
- diamètre extérieur, **de** = 500 mm
- épaisseur du tube, **e** = 10 mm

A sa base, le fût est soudé à une plaque carrée et comporte 4 nervures de renfort reliant la plaque d'appui au fût. La liaison de la plaque avec le massif de béton est réalisée par l'intermédiaire de 4 tirants positionnés à 45° par rapport au repère $\mathbf{R_1}$. Ils se situent sur un diamètre moyen de 900 (Figure 5).

Les caractéristiques mécaniques du fût sont :
E = 200000 MPa **Re** = 295 MPa **Rm** = 500 MPa

2. VERIFICATION AU FLAMBEMENT

On considère que le rapport **s** = $\mathbf{Re/\sigma_{pc}}$ = 2. Après avoir établi les hypothèses de travail, vérifier la tenue du pylône au flambement.

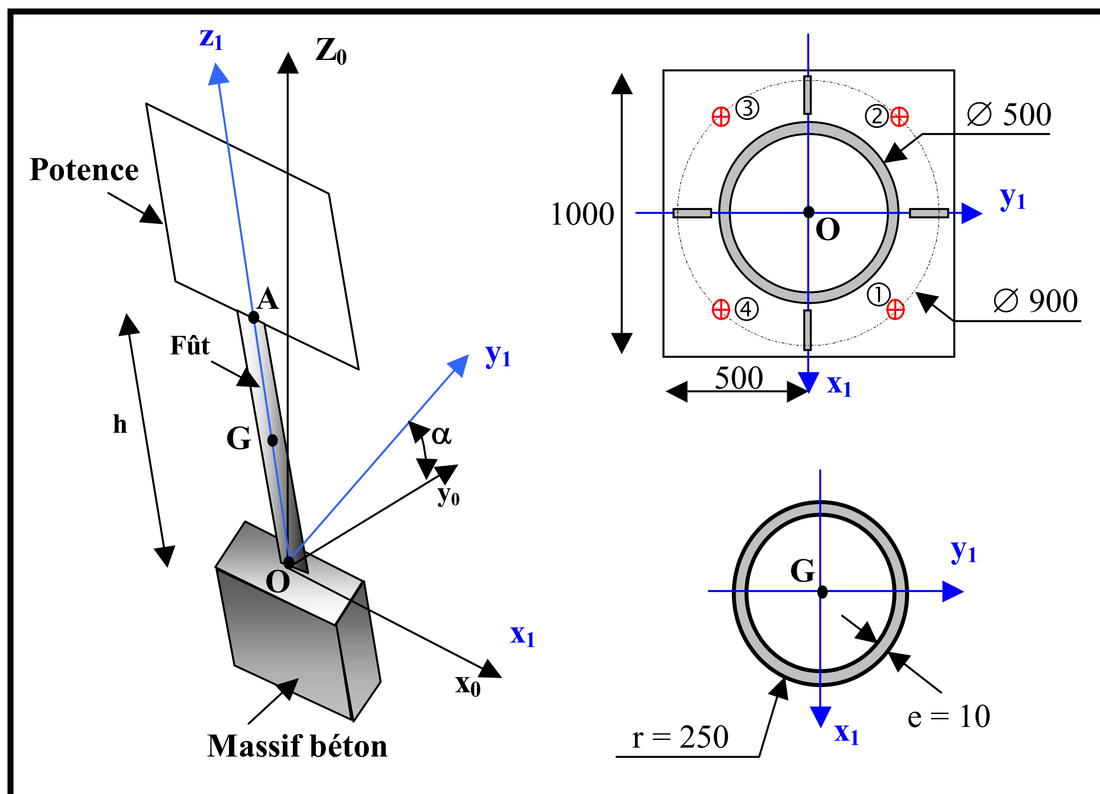


Figure 5

TABLEAU RECAPITULATIF DE CONFIGURATIONS DE FLAMBEMENT

	Flambement simple	Flambement avec flexion			Observations
		Charge transversale concentrée	Charge transversale uniformément répartie	Moment en bout	
Pièce articulée aux deux extrémités	$\ell = L$	L = l M_f = P.l/4 A = 1/12	L = l $M_f = P.l^2/8$ A = 5/48	L = l M_f = C A = 1/8	
Pièce encastrée à une extrémité et libre à l'autre	$\ell = 2L$	L = 2l M_f = P.l A = 1/12	L = 2l $M_f = P.l^2/2$ A = 1/16	L = 2l M_f = C A = 1/8	
Pièce encastrée aux deux extrémités section d'encastrement fixe	$\ell = \frac{L}{2}$, $\ell = \frac{L}{2}$	[1] L = l/2 M_f = P.l/8 A = 1/12	L = l/2 $M_f = P.l^2/12$ A = 1/13		[1] Les valeurs indiquées correspondent à une charge P appliquée au milieu de *L*. On enveloppe tous les cas correspondant à une position quelconque de P avec la valeur : M_f = 0,148 *PL*.
Pièce encastrée aux deux extrémités avec translation	L, $\ell = L$	L = L M_f = P.l/2 A = 1/12	L = l $M_f = P.l^2/3$ A = 1/13		[2] Les valeurs indiquées correspondent à une charge P appliquée au milieu de *L*. On enveloppe tous les cas correspondant à une autre position de P avec la valeur : M_f = -0,1925 PL.
Pièce encastrée à une extrémité articulée et guidée à l'autre	$\ell = 0{,}7L$	[2] $L = l/\sqrt{2}$ M_f = P.l/4 A = 1/12	$L = l/\sqrt{2}$ $M_f = P.l^2/8$ A = 1/13	[3] $L = l/\sqrt{2}$ M_f = C/2 A = 1/8	[3] Dans ce cas il convient de vérifier également à la rotule la condition $\sigma + C/w < R$.

ETUDE DES CONTACTS LARGES

A. NOTIONS GENERALES

1. MODELISATION

Des études microscopiques de la pression dans le cas de contacts larges montrent que la surface réelle de contact est beaucoup plus petite que la surface apparente (de l'ordre de 1000 fois plus petite). De plus, cette surface varie en fonction de l'intensité de l'effort appliqué.

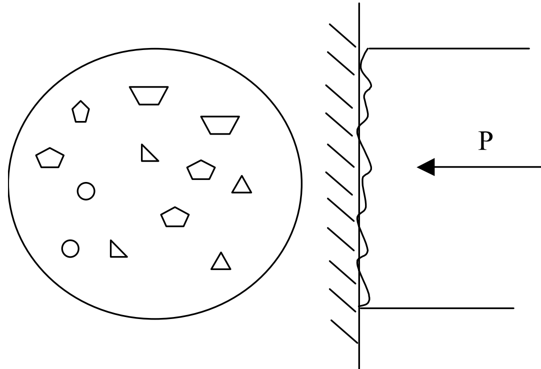


Figure 1 : Surface de contact

Devant cette complexité, l'usage est d'appliquer une **modélisation macroscopique** du contact large. Ainsi, la **géométrie** des surfaces est considérée comme **parfaite** et des **modèles** de répartition des **forces surfaciques** sont mis en place.

2. CRITERES DE DIMENSIONNEMENT

Il y a 3 critères principaux de dimensionnement. Ces critères délimitent la zone de fonctionnement admissible pour le contact.

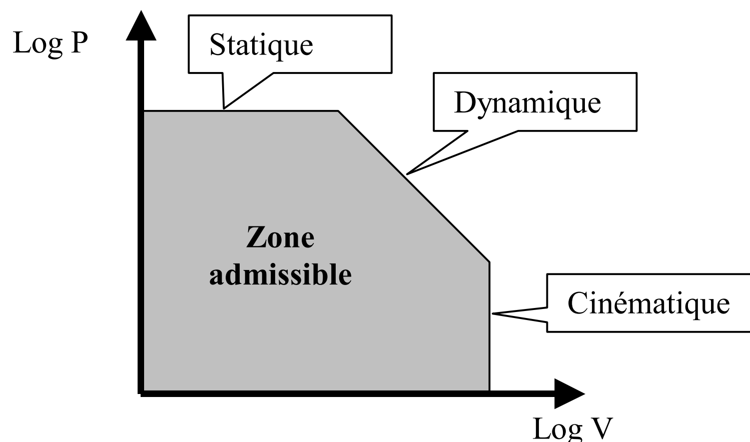


Figure 2 : Zone de fonctionnement admissible pour le contact

Critère statique : $P_{max} < P_{adm}$
Ce premier critère est d'ordre purement statique. La pression maximale doit rester en deçà d'une valeur limite : la pression de matage. Compte tenu de la modélisation grossière adoptée, il convient d'exploiter les valeurs de matages définies expérimentalement pour l'application spécifique envisagée. Il est en effet dangereux de généraliser la limite de matage d'un matériau sans tenir compte du contexte pour lequel cette valeur à été obtenue.

Critère cinématique : $V_{max} < V_{adm}$
Ce critère permet d'éviter le phénomène de grippage. La vitesse de glissement doit rester inférieure à une valeur limite.

Critère dynamique : $(P.V)_{max} < (P.V)_{adm}$
Ce dernier critère combine les effets de la pression et de la vitesse. Le produit de la pression par la vitesse donne une idée de la puissance perdue par frottement. Ainsi, la limite à ne pas dépasser est définie pour un couple de matériaux et un type de refroidissement donnés.

B. APPLICATION AU CONTACT PLAN/PLAN

1. MODELISATION

La modélisation considère un contact plan de longueur h et de largeur b soumis à une force F. Plusieurs cas ont été étudiés. Ils permettent de tenir compte de l'excentration de l'effort F suivant la longueur (F est toujours considéré comme centré sur la largeur). Les différents cas sont répertoriés sur la figure suivante.

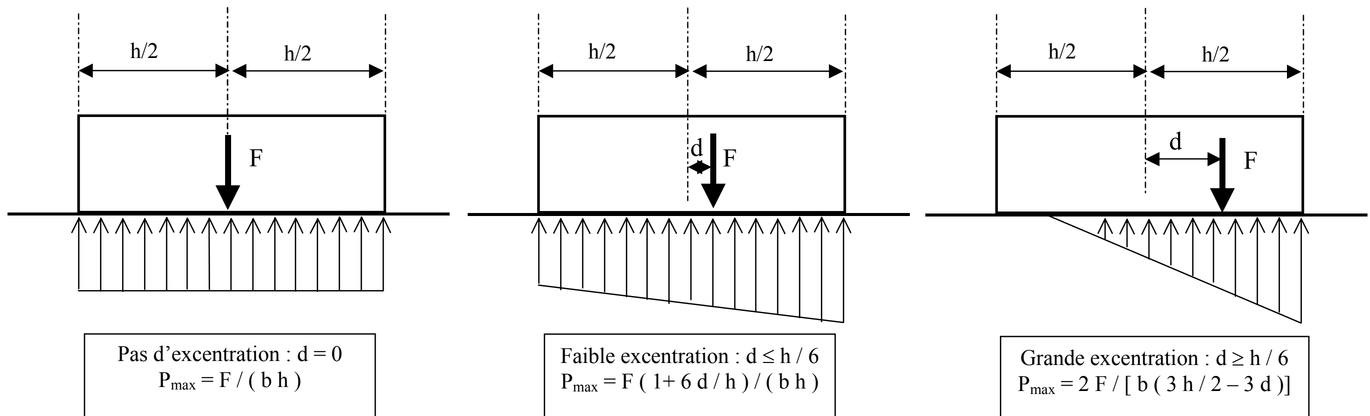


Figure 3 : Calcul de P_{max} pour un contact Plan/Plan

Les formules proposées amènent à une pression infinie dans le cas où l'effort F est appliqué en bordure du contact. Ceci amène à rester vigilant sur les jeux dans les liaisons.

Les calculs de bureau d'étude amènent souvent à considérer un effort centré. De plus, il arrive que seul le critère statique soit utilisé. Dans ce cas, c'est la limite associée à P_{adm} qui dépend des conditions d'utilisation. Le tableau suivant présente des valeurs de pression admissibles dans le cas de clavettes et de cannelures. Il est à noter que dans une approche de pré-dimensionnement, une cannelure est assimilée à une super clavette avec seulement la moitié des dents qui participent à la transmission d'effort (pour tenir compte des dispersions de fabrication).

Conditions de fonctionnement	clavette parallèle en A60	Cannelure avec choc	Cannelure sans choc
Assemblage fixe	30 à 115	30 à 100	100 à 200
Déplacement sans charge	12 à 40	20 à 60	50 à 100
Déplacement sous charge	3 à 15	3 à 15	10 à 30

Tableau 1 : Pressions admissibles P_{adm} en MPa

2. ETUDE DES SURFACES PLANES EN ROTATION

Les surfaces planes ne rotation sont utilisées dans les freins, les embrayages et la butées axiales. La modélisation proposée sur la figure suivante permet de relier l'effort axial, le couple et la pression de contact.

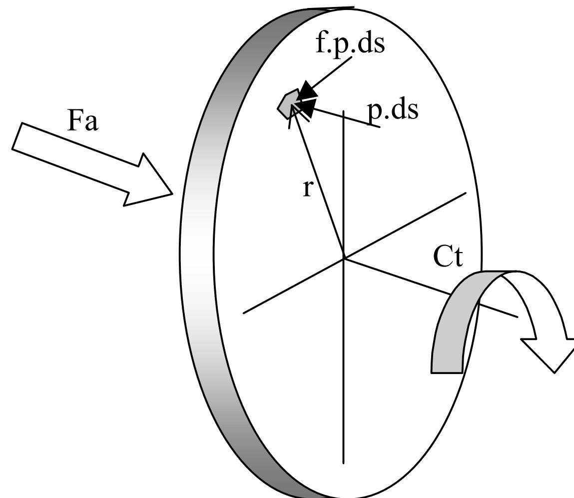


Figure 4 : Modélisation du contact entre surfaces planes en rotation

A partir de cette modélisation, deux hypothèses peuvent être exploitées :

- ✓ Le pivot est neuf : la pression est uniforme
- ✓ Le pivot est usé : la pression dépend de la loi d'usure P.V = Cste

La figure suivante montre les formulations obtenues pour ces deux hypothèses.

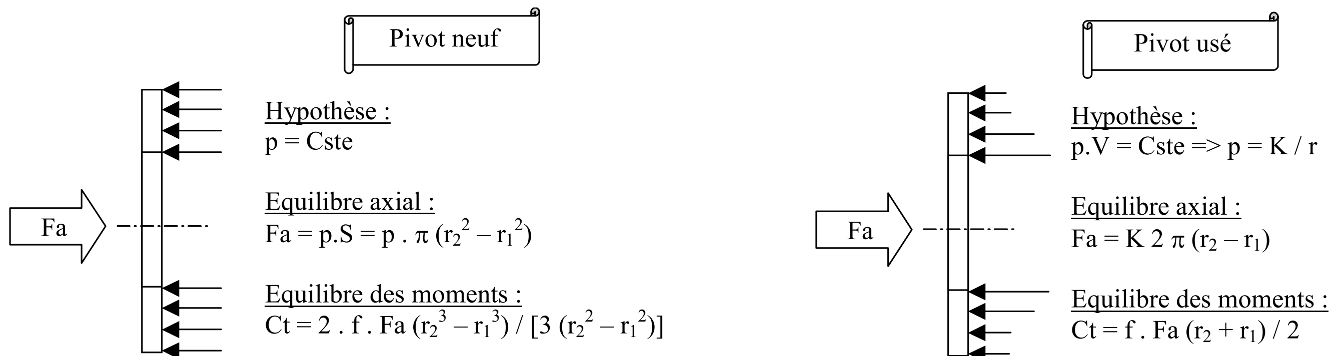


Figure 5 : Relations entre p, Fa et C_t pour un contact Plan/Plan

C. APPLICATION AU CONTACT CYLINDRE/CYLINDRE

1. MODELISATION

L'étude considère la transmission d'un effort radial F à travers le contact entre deux cylindres. La surface à l'interface à un diamètre D et une longueur L. La répartition de la pression dans le contact cylindre/cylindre dépend du jeu dans la liaison. La figure suivante recense les diverses configurations qui peuvent être rencontrées.

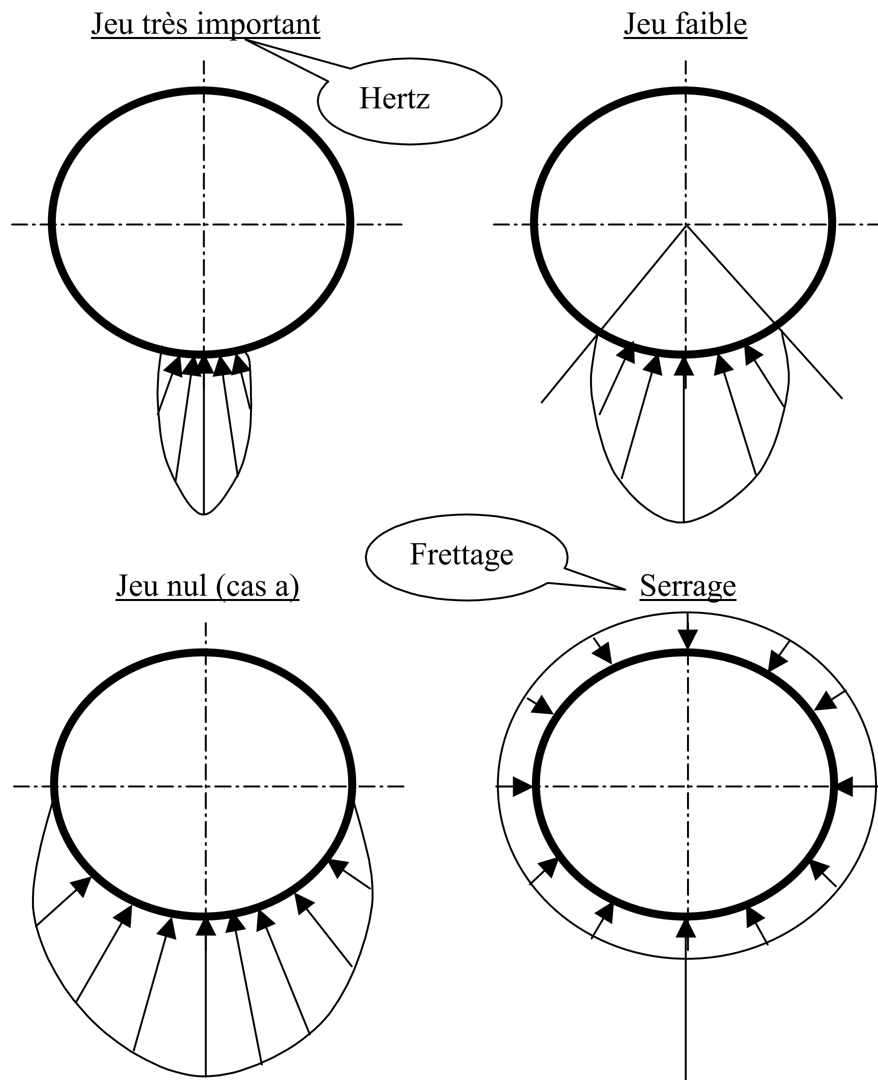


Figure 6 : Profils de pression en fonction du jeu dans un contact cylindre/cylindre

L'étude du jeu faible nécessite un étude des déformations mises en jeu lors du contact. Cette modélisation est donc peu utilisée dans la pratique.

Le modèle sans jeu peut être exploité de deux manières différentes :

- Cas a : la pression de contact est proportionnelle à la déformation => $P_{max} = 4 F / (\pi L D) < P_{adm}$
- Cas b : la pression de contact uniforme => $P_{max} = F / (L D) < P_{adm}$

2. ETUDE DES PALIERS LISSES

Les paliers lisses sont utilisés pour réaliser une liaison pivot. Cette liaison peut être réalisée par un seul palier long (L/D>1,5) ou par combinaison de deux paliers courts (L/D<0,8) avec pour les deux cas, un jeu de l'ordre de j = D/2000.

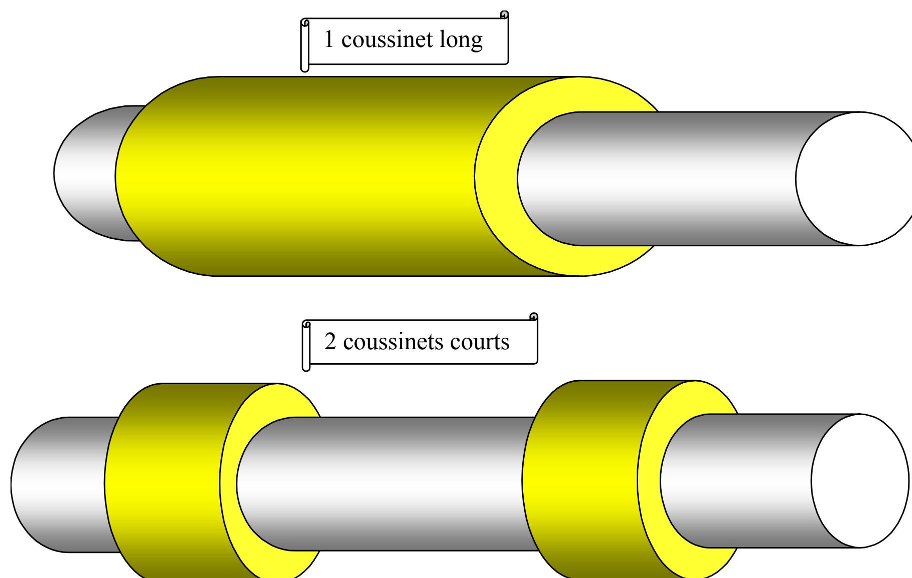


Figure 7 : Utilisation de paliers lisses pour la réalisation d'une liaison pivot

L'utilisation d'un seul palier long conduit la liaison à transmettre un effort et couple. Cette utilisation s'écarte des modélisations considérées dans cette étude. Par contre, l'utilisation de deux paliers courts distants conduit à des transmissions d'efforts sans couple qui sont en bonne corrélation avec les modélisations présentées. C'est cette configuration qui est étudiée.

Les manufacturiers de paliers lisses exploitent généralement le cas b de la modélisation sans jeu car c'est le modèle le plus simple à exploiter (pression uniforme). Les valeurs limites fournies sont alors adaptées en conséquence. Le tableau suivant présente les valeurs limites pour les critères statique, cinématique, dynamique et thermique pour des coussinets en contact avec un arbre en acier.

Tableau 2 : Limites admissibles pour des paliers lisses cas b

Type de coussinet	P_{adm} en MPa	V_{adm} en m/s	$(P.V)_{adm}$ en MPa.m/s	T°extrêmes en °C
Glacier acétal	14	2 à 3	0,5 à 0,9	-40 à 100
Glacier PTFE	20	3	0,9 à 1,5	-200 à 280
Graphite	5	13	0,5	400
Bronze-étain	7 à 35	7 à 8	1,7	>250
Bronze-plomb	20 à 30	7 à 8	1,8 à 2,1	250
Nylon	7 à 10	2 à 3	0,1 à 0,3	-80 à 120
Acetal	7 à 10	2 à 3	0,1	-40 à 100

LES ACTIONNEURS

A. NOTIONS GENERALES

A la différence des structures figées de Génie Civil, le concepteur mécanicien s'intéresse aux machines où des pièces sont mises en mouvement. La cinématique de ces pièces et leur organisation permet de remplir la fonction globale du système. L'organe mécanique qui apporte le mouvement est appelé actionneur. Le choix et le dimensionnement de l'actionneur conditionne grandement la structure finale de la machine, aussi il faut y apporter un grand soin. L'objet de ce document est de présenter un grand éventail des solutions technologiques utilisables en conception mécanique avec les caractéristiques associées pour vous permettre de faire le bon choix lors de la conception d'une machine.

1. TYPES D'ACTIONNEURS

L'objet de l'actionneur est de mettre en mouvement tout ou partie d'un mécanisme. Les mouvements de base considérés en théorie des mécanismes sont la translation et la rotation. Ainsi, on peut distinguer deux catégories d'actionneurs :

- ✓ Les actionneurs linéaires
- ✓ Les actionneurs rotatifs

Le tableau suivant présente quelques exemples d'actionneurs linéaires et rotatifs.

Actionneurs linéaires	Actionneurs rotatifs
Vérin pneumatique	Moteur pneumatique
Vérin hydraulique	Moteur hydraulique
Vérin électrique	Moteur électrique synchrone, asynchrone, CC, pas à pas
Moteur électrique linéaire	Moteur thermique
Electro-aimant (faible course)	Eolienne

2. ENERGIE D'ENTREE DES ACTIONNEURS

Historiquement, la première source d'énergie d'un actionneur a été l'énergie musculaire humaine. Ensuite, l'homme c'est facilité la tache en utilisant l'énergie animale (chevaux, ânes, bœufs…). L'homme a aussi exploité les ressources naturelles venant du vent et des cours d'eau. Désormais, dans les machines modernes, les principales sources d'énergies sont l'énergie électrique, pneumatique et hydraulique. L'énergie hydraulique est majoritairement générée à proximité de la machine par un groupe hydraulique. L'énergie pneumatique peut être générée de manière identique ou amenée par un réseau existant. Les méthodes de production de l'énergie électrique sont très variées. Le réseau électrique est souvent exploité, mais l'utilisation d'accumulateurs, d'éoliennes, de capteurs solaires ou de groupes électrogènes peut aussi être intéressante.

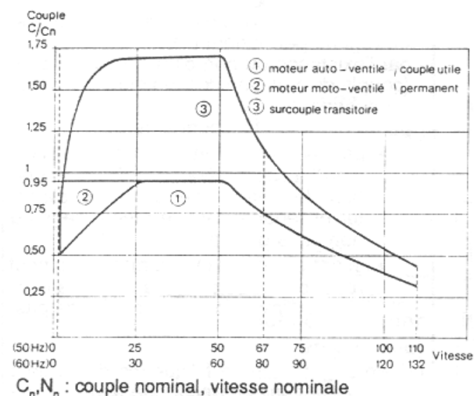
Le tableau suivant compare les sources d'énergies hydrauliques, pneumatiques et électriques.

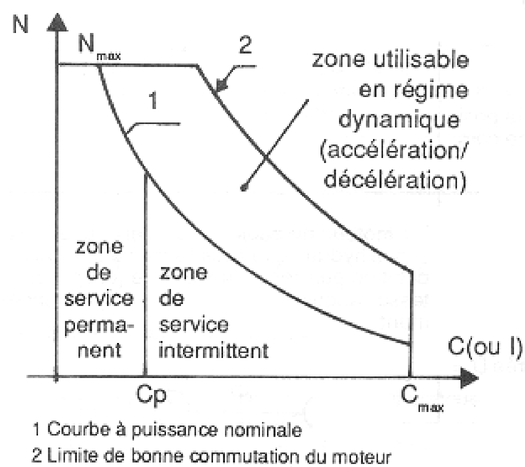
Domaine	**ENERGIE**		
	ELECTRIQUE	HYDRAULIQUE	PNEUMATIQUE
Alimentation	Réseau électrique	Groupe hydraulique	Groupe pneumatique ou réseau existant
Puissance	Moyenne	Elevée	Faible
Protection	Délicate	Très facile	Très facile
Précision vitesse ou position	Très bonne	Bonne	Faible
Performance dynamique	Bonnes	Excellentes	Très bonnes
Insensibilité à l'environnement	Moyenne	Excellente	Très bonne
Résistance à la température	< 80°	Standard : 10° < T° < 80°	Peu sensible (voir joints)
Fiabilité	Fragilité thermique	Attention à la filtration Excellente tenue mécanique	Très bonne
Rendement global Rendement de l'actionneur	Elevé : 0.6 à 0.8 Très élevé : 0.9 et plus	Limité : 0.2 à 0.5 Bon : 0.5 à 0.8	Faible <0.1 Limité 0.2 à 0.5
Coût	Moyen	Faible pour puissances élevées	Faible
Utilisations privilégiées	- Tous les asservissements de position ou de vitesse de bonne performance. - Asservissements de très haute performance à puissance moyenne (< 5kW : robotique, machines de précision)	- Entraînement direct à efforts très élevés - Asservissement d'efforts : machines d'essais - Télécommandes embarquées (avion, automobile) - Commande antidéflagrante (peintures)	- Asservissements d'effort en performance limitées (équilibrage de charge) - Asservissement de position de performances limitées : manipulateurs économiques - Commande antidéflagrante (peintures) - Outillages portatifs (perceuses, meuleuses)

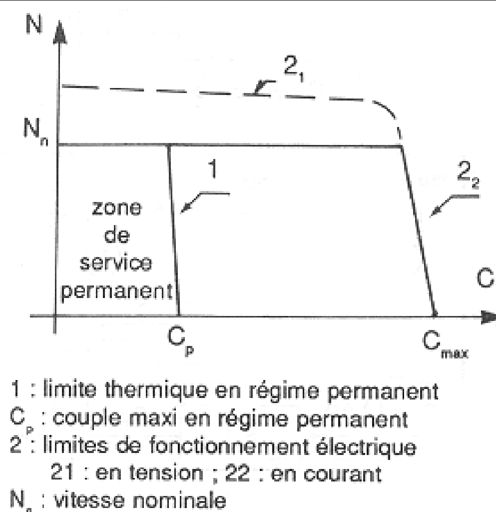
B. CARACTERISTIQUES

1. CARACTERISTIQUES DES ACTIONNEURS

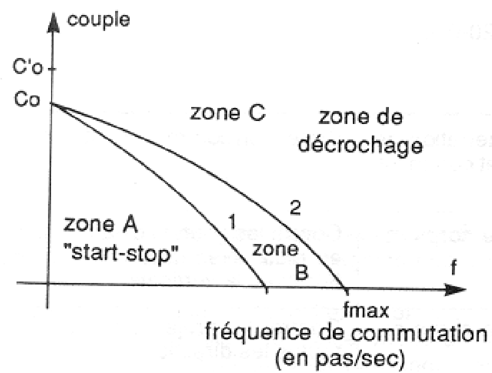
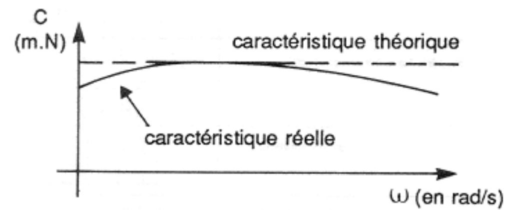
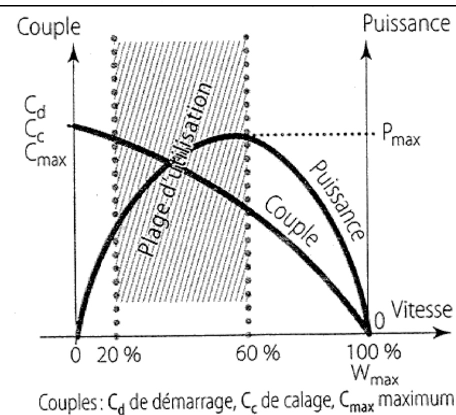
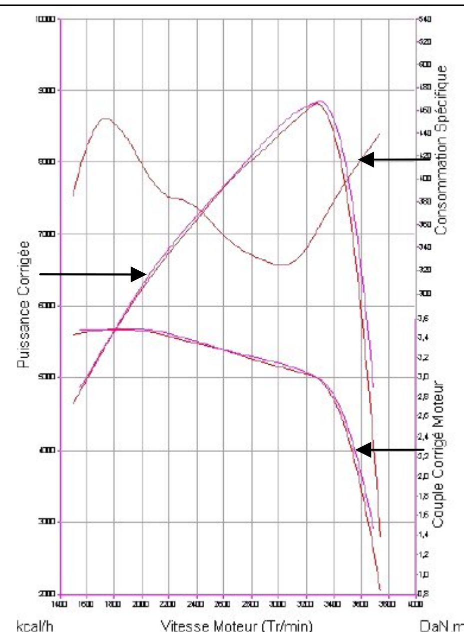
<table>
<tr><th>Type d’actionneur</th><th>Allure de la caractéristique</th></tr>
<tr><td>MOTEUR ASYNCHRONE</td><td>
Courbe caractéristique : couple moteur C - vitesse de rotation N (moteur à cage)



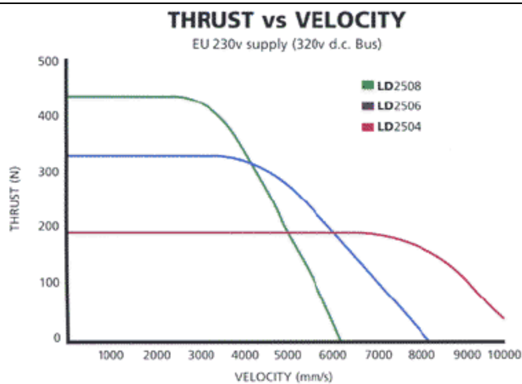
</td></tr>
<tr><td>MOTEUR A COURANT CONTINU</td><td>


</td></tr>
<tr><td>MOTEUR SYNCHRONE</td><td>


</td></tr>
</table>

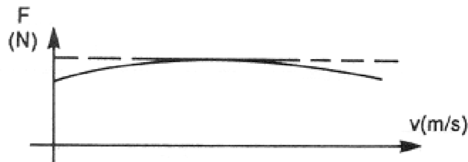
MOTEUR PAS A PAS	 C'o : couple maximal statique de maintien Co : couple maximal dynamique Zone A : zone de fonctionnement "start-stop" ou de démarrage, limitée par la courbe 1 Zone B : zone d'entraînement (limite 2) Zone C : zone de décrochage avec perte de pas
MOTEUR HYDRAULIQUE	Le fonctionnement en régime permanent est défini par : • la vitesse angulaire : $\omega = \frac{Q}{D}$ • le couple moteur : $C = \eta D . \Delta p$ 
MOTEUR PNEUMATIQUE	 Couples : C_d de démarrage, C_c de calage, C_{max} maximum
MOTEUR THERMIQUE A EXPLOSION	

MOTEUR ELECTRIQUE LINEAIRE



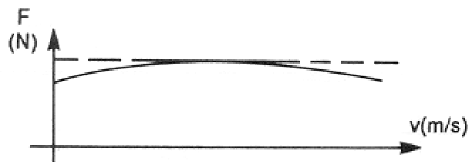
VERIN HYDRAULIQUE

Le fonctionnement en régime permanent est défini par :
- la vitesse linéaire : $v = Q/S$
- l'effort moteur : $F = \eta S. \ \Delta p$

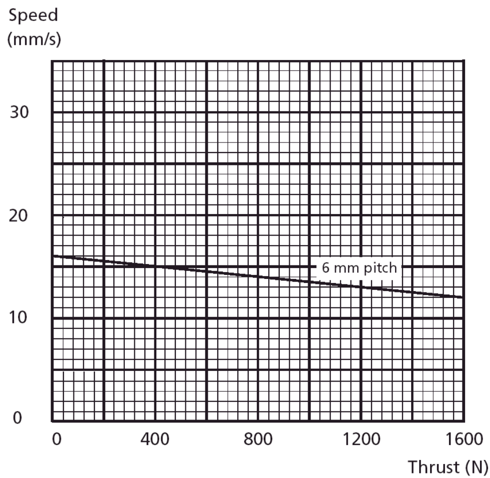


VERIN PNEUMATIQUE

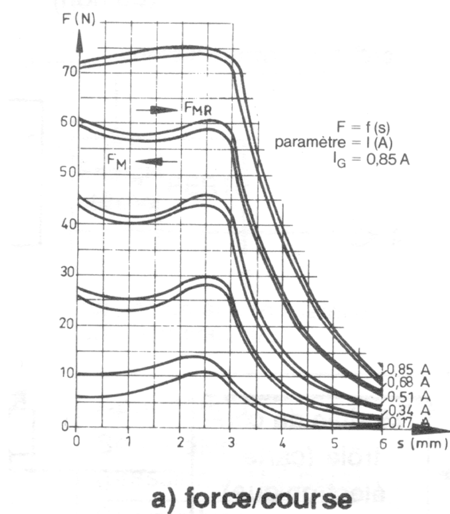
Le fonctionnement en régime permanent est défini par :
- la vitesse linéaire : $v = Q/S$
- l'effort moteur : $F = \eta S. \ \Delta p$



VERIN ELECTRIQUE



ELECTRO-AIMANT



a) force/course

2. CARACTERISTIQUES DE SYSTEMES A ENTRAINER

Puissance	Couple résistant	Exemple de machine	Allure de la caractéristique
proportionnelle à Ω	**Couple constant**	- Compresseurs à pistons - Pompes à engrenages - Engins de levage et de manutention	C_r ; C = Cte ; Ω
proportionnelle à Ω^3	**Couple proportionnel à Ω^2**	- Ventilateurs - Pompes centrifuges - Agitateurs - Compresseurs centrifuges	C_r ; Ω
Puissance constante	**Couple inversement proportionnel à Ω**	- Bobineuses - Machines-outils	C_r ; Ω

C. CALCUL DES REGIMES TRANSITOIRES

	Actionneur rotatif	**Actionneur linéaire**
Schéma de principe	C_{tm} C_{pm} Moteur Charge : J_{me} w_m , a_m	F_{tm} F_{pm} Charge : M_{me} V_m , γ_m
Grandeurs caractéristiques	C_{tm} : couple total moteur (Nm) w_m: vitesse angulaire moteur (rd/s) a_m : accélération angulaire moteur (rd/s^2) J_{me}: inertie équivalente de l'ensemble ramenée à l'axe moteur C_{pm}: couple permanent dû à la charge ramené au moteur (Nm)	F_{tm} : effort total moteur (N) V_m: vitesse linéaire moteur (m/s) γ_m : accélération linéaire moteur (m/s^2) M_{me}: masse équivalente de l'ensemble ramenée au moteur F_{pm}: effort permanent dû à la charge ramené au moteur (Nm)
Equation de fonctionnement en régime permanent	$C_{tm} = C_{pm}$	$F_{tm} = F_{pm}$
Equation de fonctionnement en régime transitoire	$C_{tm} = C_{pm} + J_{me} \,.\, a_m$	$F_{tm} = F_{pm} + M_{me} \,.\, \gamma_m$

Masses et inerties

	Cylindre	Tube	Masse déportée
Schéma de principe	L R Δ	L R_{moy} e Δ	Δ d M $J_{\Delta 1}$ Δ1
Masse	$M = \rho \pi L R^2$	$M = 2 \rho \pi L R_{moy} e$	M
Inertie	$J_\Delta = 1/2 * M R^2$	$J_\Delta = M R_{moy}^2$	$J_\Delta = J_{\Delta 1} + Md^2$